Frattali: esempi dalla matematica pura

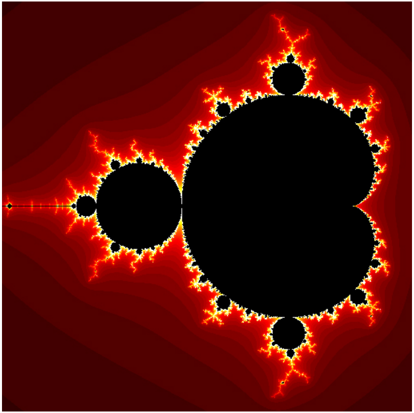
Mathesis

Massimo Albertini

2012

Outline

Benoit Mandelbrot (1924-2010)



.

Movie1 Movie2

Outline

Precursori

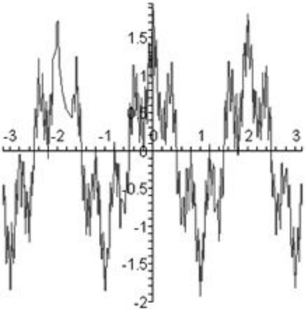
- Sebbene sia stato soprattutto Mandelbrot a sviluppare la geometria dei frattali,durante il secolo precedente diversi matematici quali Weierstrass,Cantor,Hausdorff prima e Julia,Fatou più tardi possono essere annoverati fra i suoi precursori.Weierstrass presenta l'esempio di una serie di funzioni che converge ad una funzione non derivabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \;\; a \in \mathbb{N}\, e\, 0 < b < 1$$

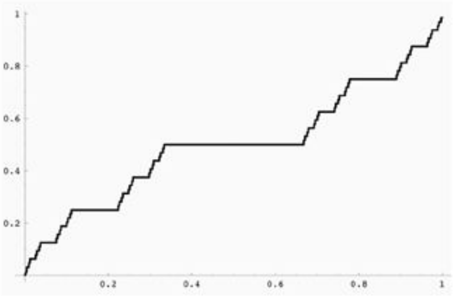
- Cantor mostra una funzione ψ con derivata nulla ovunque tranne che per un insieme di punti (l'insieme di Cantor) di misura nulla;ψ è continua, monotona, non costante tale che

$$\psi(1) - \psi(0) = 1 \;\; ma \int_0^1 \psi^{'}(x)dx = 0$$

Curve "monstre"



$$\sum_{n=0}^{400} b^n \cos(a^n x\pi) \text{ with } b = 0.5 \text{ and } a = 5$$



Graph of the function ψ

Dimensione frazionaria

- Hausdorff estese la definizione di dimensione a valori reali e non solo interi.
- Julia e Fatou svilupparono lo studio delle funzioni iterative nel campo complesso, i concetti di punti *attrattori* e *repulsivi*.
  I corrispondenti bacini di attrazione hanno per frontiera dei frattali oggi noti come insiemi di Julia.

$$J(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) \to \infty \, per \, n \to \infty \right\}$$

Insiemi di Julia

- Naturalmente, all'epoca Julia e Fatou non potevano utilizzare i computers per generare immagini come le seguenti, che richiedono milioni di iterazioni.

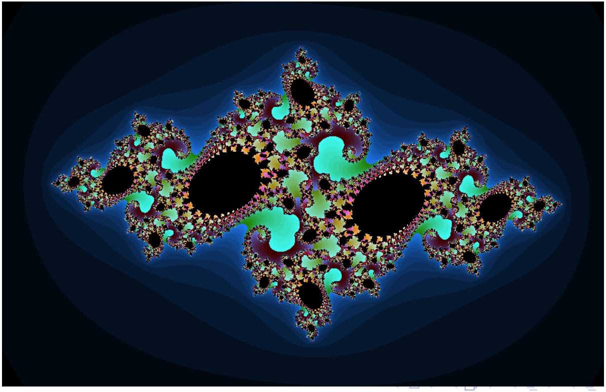


Figure:

Insiemi di Julia

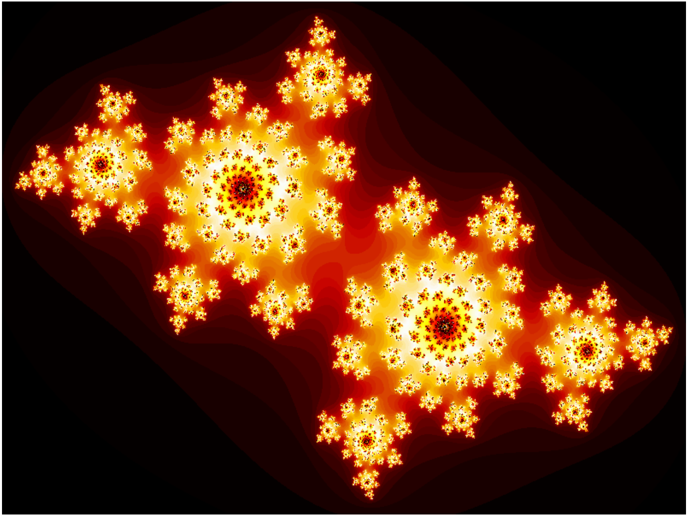


Figure:

Insiemi di Julia

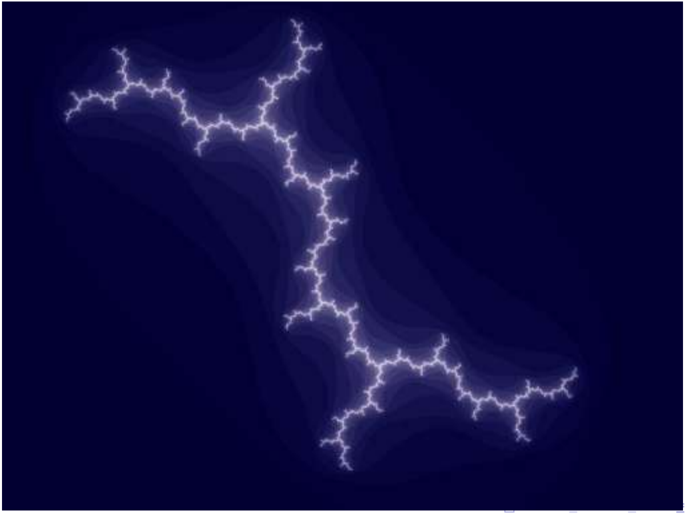


Figure:

Insiemi di Julia

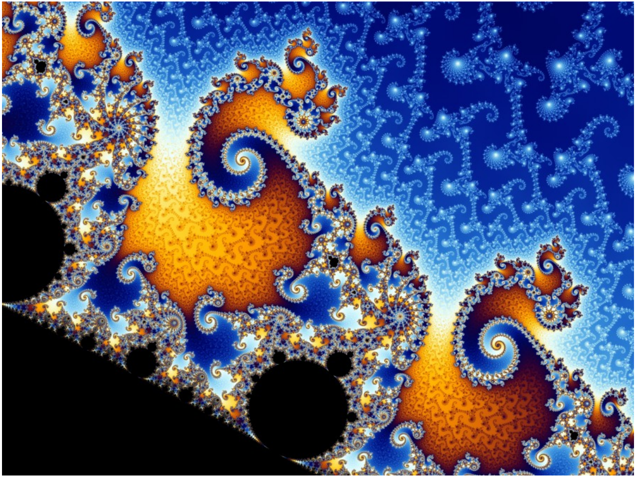


Figure:

Outline

Caratteristiche dei Frattali

- Struttura fine: nuovi dettagli su scale arbitrariamente piccole.
- Troppo irregolare per essere descritto dalla classica geometria euclidea.
- Autosomiglianza, almeno approssimativamente o statisticamente.
- Dimensione di Hausdorff maggiore della dimensione topologica, con valori anche non interi.
- Definizione semplice, spesso ricorsiva.

Caratteristiche dei Frattali

- Struttura fine: nuovi dettagli su scale arbitrariamente piccole.
- Troppo irregolare per essere descritto dalla classica geometria euclidea.
- Autosomiglianza, almeno approssimativamente o statisticamente.
- Dimensione di Hausdorff maggiore della dimensione topologica, con valori anche non interi.
- Definizione semplice, spesso ricorsiva.

Caratteristiche dei Frattali

- Struttura fine: nuovi dettagli su scale arbitrariamente piccole.
- Troppo irregolare per essere descritto dalla classica geometria euclidea.
- Autosomiglianza, almeno approssimativamente o statisticamente.
- Dimensione di Hausdorff maggiore della dimensione topologica, con valori anche non interi.
- Definizione semplice, spesso ricorsiva.

Caratteristiche dei Frattali

- Struttura fine: nuovi dettagli su scale arbitrariamente piccole.
- Troppo irregolare per essere descritto dalla classica geometria euclidea.
- Autosomiglianza, almeno approssimativamente o statisticamente.
- Dimensione di Hausdorff maggiore della dimensione topologica, con valori anche non interi.
- Definizione semplice, spesso ricorsiva.

Caratteristiche dei Frattali

- Struttura fine: nuovi dettagli su scale arbitrariamente piccole.
- Troppo irregolare per essere descritto dalla classica geometria euclidea.
- Autosomiglianza, almeno approssimativamente o statisticamente.
- Dimensione di Hausdorff maggiore della dimensione topologica, con valori anche non interi.
- Definizione semplice, spesso ricorsiva.

Caratteristiche dei Frattali

- Struttura fine: nuovi dettagli su scale arbitrariamente piccole.
- Troppo irregolare per essere descritto dalla classica geometria euclidea.
- Autosomiglianza, almeno approssimativamente o statisticamente.
- Dimensione di Hausdorff maggiore della dimensione topologica, con valori anche non interi.
- Definizione semplice, spesso ricorsiva.

Outline

Dimensione.

- Consideriamo un oggetto di grandezza lineare 1, appartenente ad uno spazio euclideo di dim. D e riduciamo la sua grandezza di un fattore $1/L$ in ogni direzione spaziale: occorrono $N = L^D$ copie ridotte dell'oggetto per coprire l'oggetto originale.

Dimensione euclidea

- $D = \dfrac{\log N(L)}{\log(L)}$

Dimensione.

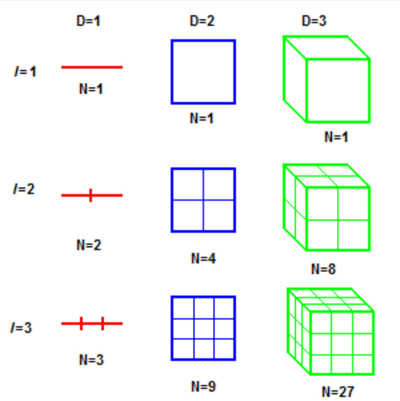
- Consideriamo un oggetto di grandezza lineare 1, appartenente ad uno spazio euclideo di dim. D e riduciamo la sua grandezza di un fattore $1/L$ in ogni direzione spaziale: occorrono $N = L^D$ copie ridotte dell'oggetto per coprire l'oggetto originale.

Dimensione euclidea

- $D = \dfrac{\log N(L)}{\log(L)}$

Dimensione

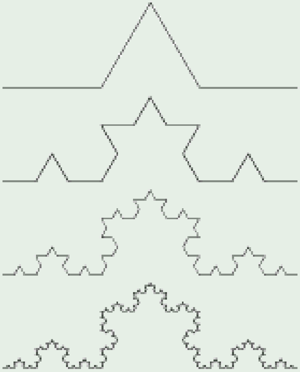
Dimensione euclidea



$$N = L^D \qquad D = \frac{\log N(L)}{\log(L)}$$

Dimensione

Esempio:Curva di Koch



$$D = \frac{\log N(L)}{\log(L)} = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.26$$

Outline

Misura di Hausdorff.

- Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ ed $s \geq 0, |U| = diam(U)$. Per ogni $\delta \geq 0$ definiamo

$$H^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta - \text{ricoprimento di } F\right\}.$$

-

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0^+} H^s_\delta(F) \; misura\; s - dim.\, di\, Hausdorff\,.$$

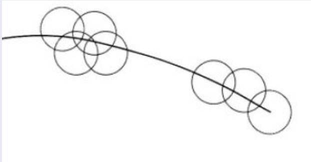


Figura: Es. di δ−ricoprimento

Misura di Hausdorff.

Misura di Hausdorff per s naturale

- Se s è un numero naturale la misura di Hausdorff coincide, a meno di un fattore di proporzionalità, con la consueta misura euclidea $s-$dimensionale:

$$H^n(F) = \frac{vol^n(F)}{c_n} \, per \, n \in \mathbb{N}$$

dove $c_n = volume\, della\, n - sfera\, di\, diametro\, 1.$

Dimensione di Hausdorff.

- $\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$.
- $H^s(F) = \begin{cases} \infty & se\ 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & se\ s > \dim_H F \end{cases}$.

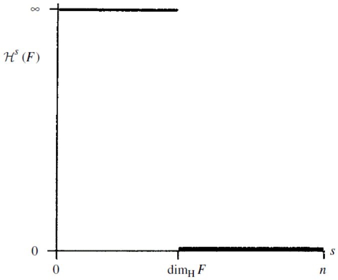


Figura: La dim. di Hausdorff è il valore di s in cui avviene un "salto".

Dimensione di Hausdorff.

- Un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim_H F < 1$ è totalmente sconnesso

Esempio

Insieme di Cantor

- C ha misura nulla, è non numerabile, chiuso e ogni suo punto è di accumulazione. E' autosimile e $\dim_H C = \dfrac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.63..$

Dimensione di Hausdorff.

Esempio

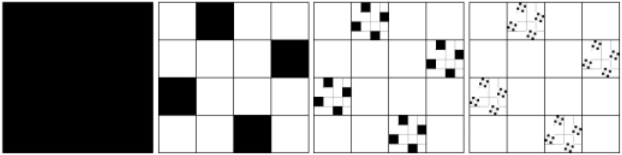


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

- Polvere di *Cantor* : $\dim_H F = 1$

Definizioni alternative: dimensione del compasso

- Operiamo delle misure sull'insieme in modo da ignorare le eventuali irregolarità di grandezza inferiore a δ e poi osserviamo il comportamento di queste misure quando $\delta \to 0^+$.
- Ad es. se $\mathfrak{L}$ è una curva piana le misure $N_\delta(\mathfrak{L})$ possono essere il numero di passi contati su $\mathfrak{L}$ con un compasso aperto ad ampiezza δ. Se vale la legge di potenza:

$$N_\delta(\mathfrak{L}) \sim c\left(\frac{1}{\delta}\right)^s,$$

$$\dim \mathfrak{L} = s = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(\mathfrak{L})}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

- s si stima come la pendenza, cambiata di segno, di una retta in un sistema in scala logaritmica di $\log N_\delta(\mathfrak{L})$ rispetto a $\log \delta$.

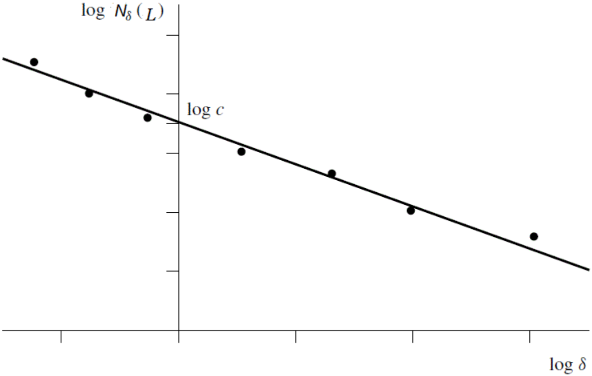


Figura: Stima empirica della dimensione di una curva piana $\mathfrak{L}$, supponendo che valga la legge di potenza $N_\delta(\mathfrak{L}) \sim c\delta^{-s}$.

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?

- Mandelbrot scrisse un articolo sulla dipendenza della misura della linea costiera dalla scala impiegata.
- Tabella con le misurazioni al variare del lato della poligonale approssimante:

Apertura del compasso	*Lunghezza*
$500\,km$	$2600\,km$
$100\,km$	$3800\,km$
$54\,km$	$5770\,km$
$17\,km$	$8640\,km$

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?

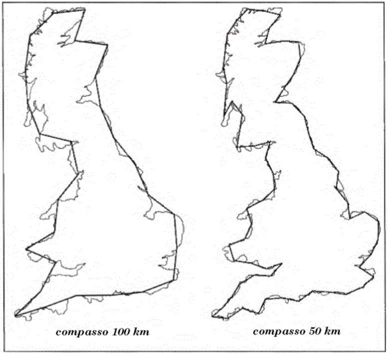


Figure: Approssimazioni della costa della Gran Bretagna tramite poligonali di lato via via più piccolo.

Dimensione “box counting” per $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato

Definizione

$$\dim_B E = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

dove $N_\delta(E)$ è il numero di cubi di un $\delta-$reticolo che interseca E.

Dimensione box-counting della costa della GB

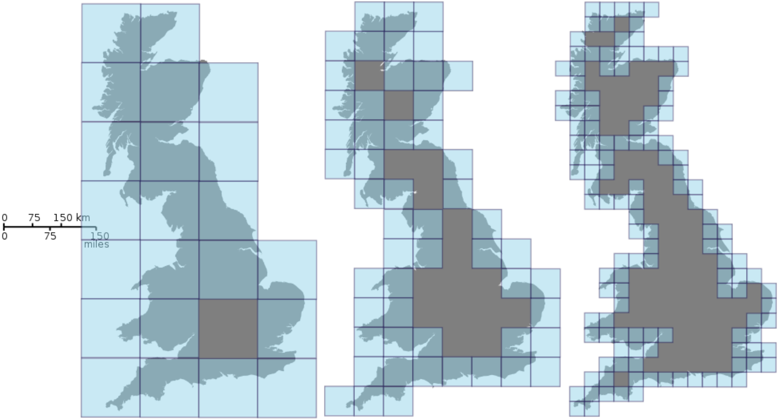


Figura: Costa della Gran bretagna.Griglia quadrata per il calcolo della dimensione box-counting.

Relazione tra dim. Hausdorff e “box counting”

- In generale vale $\dim_H E \leq \dim_B E$. A volte vale il minore stretto come ad es. negli insiemi densi: ad esempio se $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ allora essendo $\dim_B E = \dim_B \overline{E}$ si ha $\dim_B E = 1$ mentre $\dim_H E = 0$.
  Per gli insiemi autosimili vale l'uguaglianza.
- Hausdorff: pesi diversi $|U_i|^s$ per i diversi U_i del ricoprimento.
- “Box counting”: stesso peso δ^s per ogni U_i.

Esempio:Insieme di dimensione qualsiasi tra 0 e 1.

Esempio

Insieme di Cantor del λ *medio.Si ottiene rimuovendo una frazione* $0 < \lambda < 1$ *della parte centrale degli intervalli, a partire dall'intervallo* $[0,1]$*. Il frattale che si trova ha sia dimensione di Hausdorff che dimensione "box counting" pari a* $\frac{\log 2}{\log\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)}$ *, e cioè al variare di* λ *una dimensione qualunque tra* 0 *ed* 1*.*

Outline

Definizione di *IFS*

- Un insieme di contrazioni $\{T_1, T_{2,} \ldots, T_m\}$ ognuna con fattore di contrazione $c_i < 1$, si dice sistema di funzioni iterate o *IFS*. Dato A compatto si dice *operatore di Hutchinson* l'operatore H :
$$H(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \ldots \cup T_m(A)$$
- Un sottoinsieme compatto K si dice un *attrattore* per l'*IFS* se esso è invariante rispetto all'operatore di *Hutchinson* H, se cioè
$$K = \bigcup_{i=1}^{m} T_i(K)$$

Esistenza e unicità dell'attrattore

- La proprietà fondamentale degli *IFS* è che essi determinano un unico attrattore e questo è in genere un frattale.
- L'attrattore del *IFS* si trova applicando iterativamente H :

$$K = H(A) \cap H^2(A) \cap \ldots \cap H^k(A) \cap \ldots$$

Attrattori autosimili

- In particolare, se l'*IFS* è definito da delle *similitudini* $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$, con fattori di contrazione $c_i < 1$ allora l'attrattore è detto un insieme *autosimile*, essendo l'unione di un certo numero di copie ridotte di sè stesso.
- Un frattale F autosimile ha dimensione di Hausdorff e dimensione "box counting" entrambe uguali al valore s che soddisfa la seguente equazione:

$$c_1^s + c_2^s + \cdots + c_m^s = 1$$

Frattali autosimili:triangolo di Sierpinski

Figure: Costruzione del triangolo di Sierpinski, $\dim_H S = \dim_B S = \dfrac{\log 3}{\log 2}$, soluzione dell'equazione $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$.

Frattali autosimili:spugna di Menger

- Se l'attrattore S è l'unione di N copie di sè stesso , scalate di un fattore di similitudine c, $\dim_H S = \dim_B S = \dfrac{\log N}{\log(\frac{1}{c})}$.

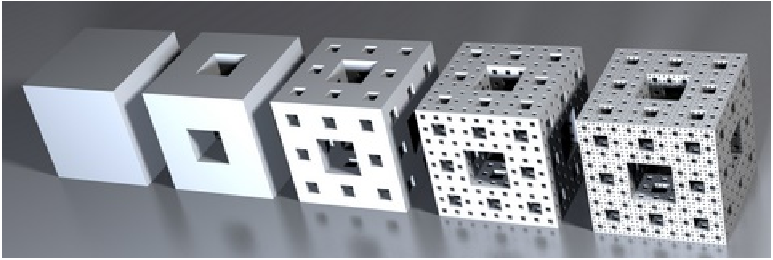
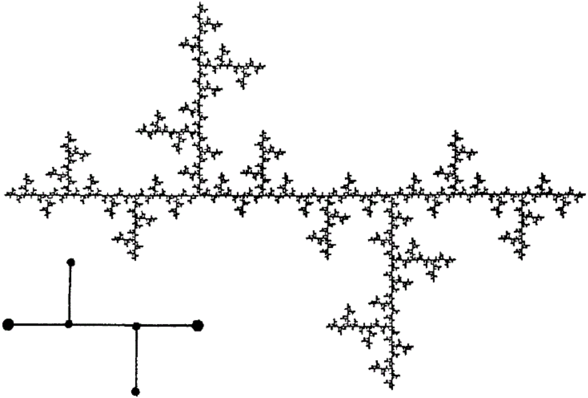


Figure: Spugna di Menger, $\dim_H S = \dfrac{\log 20}{\log 3} \simeq 2.72$.

Frattali autosimili: frattale a forma di albero

- Frattale autosimile costruito attraverso similitudini rappresentate in un diagramma generatore. La sua dimensione di Hausdorff è $\log 5/\log 3 \simeq 1.46$.



Outline

Il frattale della parola di Fibonacci

- La *parola di Fibonacci* è una sequenza infinita di simboli di un alfabeto di due sole lettere. Se $f_1 = "1"$ e $f_2 = "0"$, si definisce $f_n = f_{n-1} f_{n-2}$ la concatenazione dei due termini precedenti.
- Le parole di Fibonacci f_k successive sono:

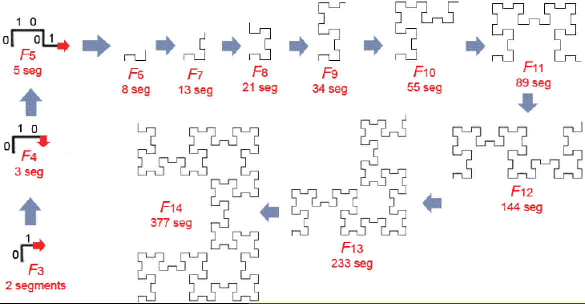
$$
\begin{aligned}
f_1 &: 1 \\
f_2 &: 0 \\
f_3 &: 01 \\
f_4 &: 010 \\
f_5 &: 01001 \\
f_6 &: 01001010 \\
f_7 &: 0100101001001
\end{aligned}
$$

- La parola infinita di Fibonacci è la stringa infinita di cifre f_∞ che si ottiene iterando questo procedimento.

Il frattale della parola di Fibonacci

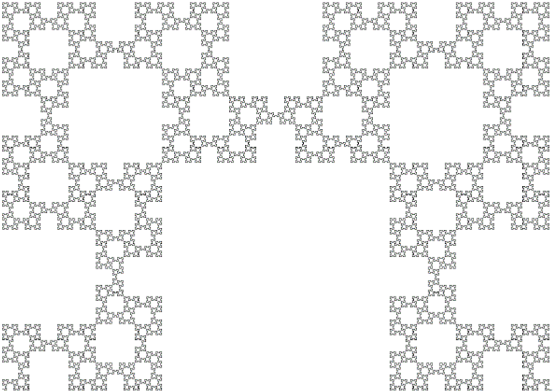
- Costruzione del frattale associato alla parola di Fibonacci; consideriamone la $n-esima$ cifra:

1. Tracciamo un segmento in avanti
2. Se la cifra è "0" allora: giriamo di 90° a sinistra se n è *pari*, di 90° a destra se n è *dispari*
3. Iteriamo

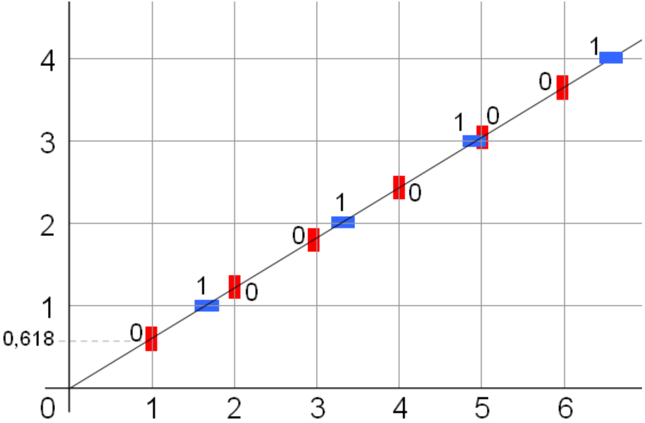


Il frattale della parola di Fibonacci

- Ogni curva Φ_n è composta proprio da F_n, $n-esimo$ numero di Fibonacci, segmenti. Il frattale della *parola di Fibonacci* è la curva Φ a cui si avvicina Φ_n per n sempre più grande. Es. Φ_{23}:

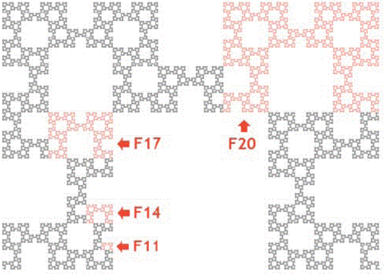


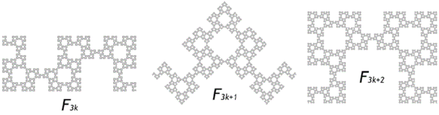
Il frattale della parola di Fibonacci



- f_∞ può essere caratterizzata dalla successione delle intersezioni di una retta per l'origine di pendenza φ^{-1}, dove $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è la sezione aurea.Il numero 0.010010100...è trascendente.

Il frattale della parola di Fibonacci





- La figura illustra il rapporto di similitudine tra Φ_n e Φ_{n-3}. Il fattore di scala è $r = 1 + \sqrt{2}$. Tre tipi di modelli per le curve Φ_n: Φ_{3k}, Φ_{3k+1} e Φ_{3k+2}

Dimensione della parola di Fibonacci

- Φ_n è composto da 4 copie di se stesso Φ_{n-3} scalate di un fattore $\frac{1}{r}$ e da una copia Φ_{n-6} scalata di un fattore $\frac{1}{r^2}$
- La dimensione di Hausdorff s è data dalla soluzione di:

$$4\left(\frac{1}{r}\right)^s + \left(\frac{1}{r}\right)^{2s} = 1$$

$$s = \dim_H \Phi = 3\frac{\log \varphi}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)} = 3\frac{\log\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}\right)}{\log\left(2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}\right)}$$

Outline

Automi cellulari.

- Un automa cellulare è una macchina a stati finiti in cui lo stato delle celle che lo compongono cambia ad ogni iterazione, in base allo stato di un gruppo di celle vicine. Ogni cella si trova in uno dei p stati possibili, rappresentati dai numeri $0, 1, 2, \dots, p-1$. L'automa può essere a una dimensione quando le sue celle sono disposte in una catena lineare o a due dimensioni se le sue celle sono disposte in un reticolo piano.
- Le successive iterazioni di un automa a una dimensione sono rappresentate da delle catene lineari di celle che sono mostrate una sotto l'altra formando *strati* successivi di celle.

Automi cellulari.

- Per funzionare un automa necessita di due informazioni: lo stato iniziale delle sue celle cioè lo strato iniziale e un insieme di regole che ne determina i cambiamenti di stato.

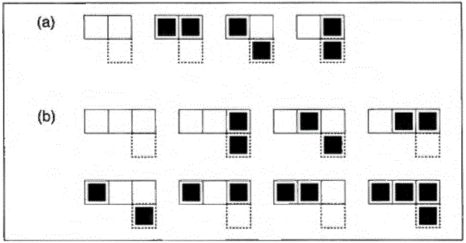


Figura: Due esempi di tabelle delle regole di un automa cellulare. In (a) quattro regole relative a due celle e due possibili stati. In (b) otto regole basate su tre celle e due stati.

Automi cellulari

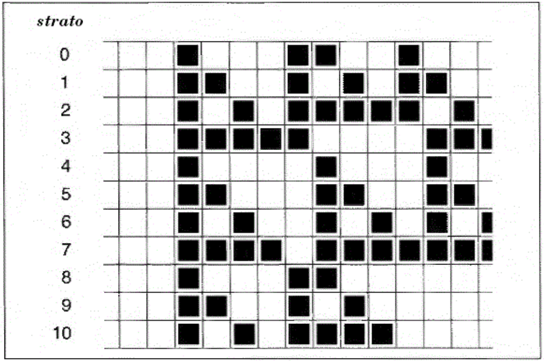


Figure: Alcune iterazioni di un automa a una dimensione e due stati (bianco e nero), che segue la tabella delle regole (a).

Automi cellulari e triangolo di Pascal

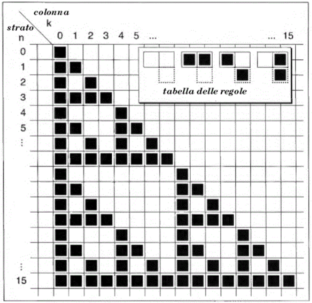
- Se $a_k(n)$ è il $k-esimo$ elemento della riga n del triangolo di Pascal allora $a_k(n) = a_{k-1}(n-1) + a_k(n-1)$.
- Se consideriamo gli elementi $mod(2)$, cioè distinti in *pari* e *dispari*, possiamo riscrivere la regola dei coefficienti binomiali con una tabella:

$a_{k-1}(n)$	$a_k(n)$	$a_k(n+1)$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

- Questa è proprio la tabella delle regole dell'automa cellulare a due stati della tabella delle regole (a) vista prima, con le caselle bianche per i pari e quelle nere per i dispari.

Automi cellulari e triangolo di Pascal

- Partendo da uno strato con una sola cella nera, corrispondente al numero dispari 1 in cima al triangolo di Pascal, l'automa cellulare genera tutte le righe del triangolo *mod*(2); lo schema generato risulta correlato ad uno dei frattali già visti: il triangolo di Sierpinski.

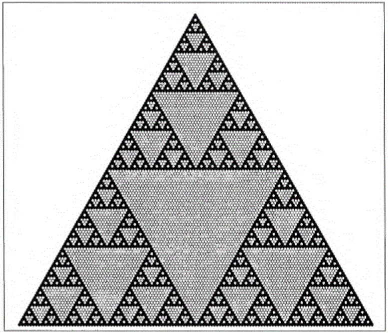


Outline

1. Introduzione ai Frattali
   - Precursori
   - Caratteristiche comuni
   - Dimensione
   - Misura e dimensione di Hausdorff
2. IFS e frattali autosimili
   - IFS: Iterated function system
3. Esempi dalla matematica pura
   - Parola di Fibonacci
   - Automi cellulari
   - Triangolo di Pascal
   - Distribuzione delle cifre nei numeri

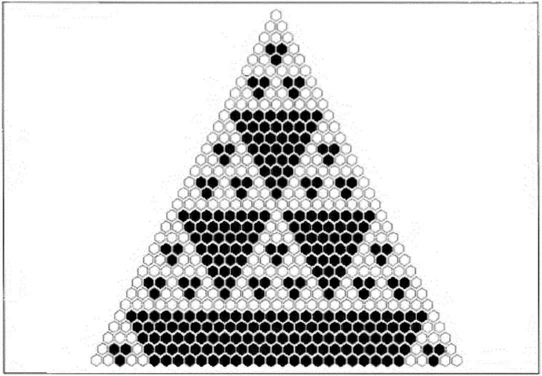
Triangolo di Pascal

- Divisibilità dei coefficienti binomiali per un intero p e la corrispondente configurazione geometrica.
- Per $p = 2$: colorando di nero gli elementi dispari e di bianco quelli pari, cioè interpretando gli elementi modulo p, si ottiene il triangolo di Sierpinski.



Triangolo di Pascal

- Analogamente considerando la divisibilità per $p = 3$ e colorando gli elementi del triangolo divisibili per 3 di nero:



Triangolo di Pascal

- $T(p) = \left\{ (n,k) : \binom{n+k}{k} \textit{ non è divisibile per } p \right\}.$
- Come nel caso del triangolo di Sierpinski ($p = 2$) anche nel caso più generale di p primo si trova un IFS il cui attrattore $\mathscr{T}(p)$ è il modello geometrico del triangolo di Pascal modulo p.

Dimensione di Hausdorff

$$\dim_H(\mathscr{T}(p)) = \frac{\log(p(p+1))/2}{\log p}$$

Triangolo di Pascal

- $T(p) = \left\{ (n,k) : \binom{n+k}{k} \textit{ non è divisibile per } p \right\}$.
- Come nel caso del triangolo di Sierpinski ($p = 2$) anche nel caso più generale di p primo si trova un IFS il cui attrattore $\mathscr{T}(p)$ è il modello geometrico del triangolo di Pascal modulo p.

Dimensione di Hausdorff

$$\dim_H(\mathscr{T}(p)) = \frac{\log(p(p+1))/2}{\log p}$$

Outline

Distribuzione delle cifre nei numeri

- I numeri in $[0,1]$ rappresentati in base m. Indichiamo con $D(p_0, p_1, \dots p_{m-1})$ l'insieme degli $x \in [0,1)$ che rappresentati in base m contengono le cifre $0, 1, \dots, m-1$ secondo le frequenze rispettive $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$.
- Quasi tutti i numeri sono *normali* rispetto a qualunque base. L 'insieme $D(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ ha misura di Lebesgue pari ad $1, \forall m$.
- Se i p_j non sono tutti uguali allora, essendo gli insiemi D densi, la loro dim. "box-counting" è 1.

Dimensione di Hausdorff

$$\dim_H D = -\frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i$$

Distribuzione delle cifre nei numeri

- I numeri in $[0,1]$ rappresentati in base m. Indichiamo con $D(p_0, p_1, \dots p_{m-1})$ l'insieme degli $x \in [0,1)$ che rappresentati in base m contengono le cifre $0, 1, \dots, m-1$ secondo le frequenze rispettive $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$.
- Quasi tutti i numeri sono *normali* rispetto a qualunque base. L 'insieme $D(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ ha misura di Lebesgue pari ad $1, \forall m$.
- Se i p_j non sono tutti uguali allora, essendo gli insiemi D densi, la loro dim. "box-counting" è 1.

Dimensione di Hausdorff

$$\dim_H D = -\frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i$$

Per ulteriori approfondimenti

K.Falconer.
Fractal Geometry.
Ed. Wiley, San Francisco, 2003.

H.-O. Peitgen,H. Jürgens, D. Saupe,
Chaos and Fractals.
Springer, New York, 2004.

Monnerot-Dumaine A.
The Fibonacci Word Fractal.
Hyper Articles en ligne
http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00367972/en/, 2009.