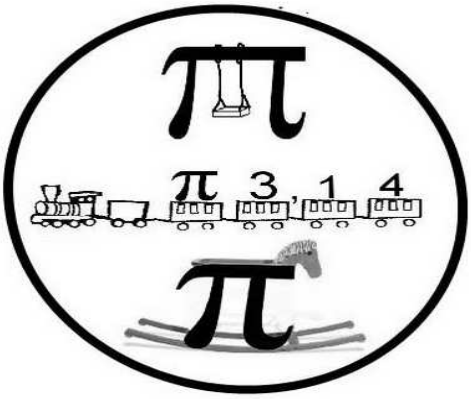
La probabilità ed il numero π.

Mathesis, Firenze, 27 gennaio 2010



Giuseppe
ANICHINI

$*$

$* \quad *$

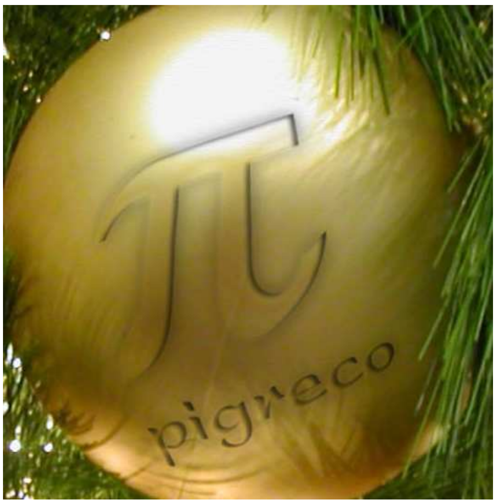
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327 9\ldots$$

Ave o Roma o madre gagliarda di latine virtù ....

Il valore (approssimato) uguale 3.14 ha dato luogo al **Pi Day**, ovvero il 14 Marzo. (3.14 nel modo in cui gli americani scrivono le date).

È datata 12 marzo 2009 la Risoluzione della Camera dei Rappresentanti degli Stati Uniti d'America tramite la quale si riconosce il **14 marzo** come giornata ufficiale per celebrare la nota costante e si invitano i docenti a vivere il Pi Day come occasione per *"incoraggiare i giovani verso lo studio della matematica"*. Il Pi Day è famoso fra i bambini che, se hanno un maestro entusiasta, parla a loro di π, di cerchi (soprattutto a forma di torta....). – (Compleanno di Einstein).

π appare ovunque in Matematica, non solo nei cerchi ma anche in problemi collegati all'economia ed alla statistica.



L'integrale della funzione gaussiana è dato da:
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$,
calcolabile esattamente su tutta la retta reale.

Nell' Antico Testamento, (I Re,7:23), si legge, a proposito dell'altare costruito nel tempio di Salomone: "*.... dieci cubiti da una sponda all'altra cioè completamente rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e una corda di trenta cubiti lo circondava all'intorno*". Questo passo indica che il rapporto della circonferenza al diametro è 3; ...

John Taylor, all'inizio del 1800, ha scoperto che dividendo il perimetro della Piramide di Cheope per il doppio dell'altezza si otteneva un valore molto simile a π.

"Computi inauditi" di Tobia Ravà

"...quello che hanno scoperto alla fine, c'è da non crederci, è che qualsiasi fiume, proprio qualsiasi fiume, prima di arrivare al mare fa esattamente una strada tre volte più lunga di quella che farebbe se andasse dritto,

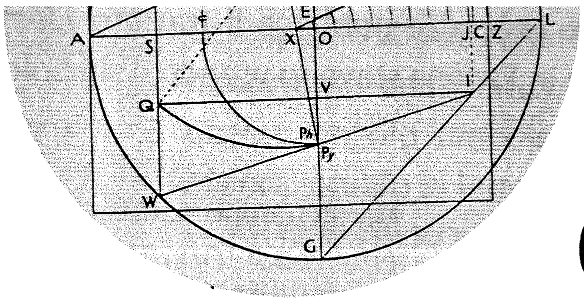
" sbalorditivo se ci pensi, ci mette tre volte tanto quello che sarebbe necessario, e tutto a furia di curve, appunto, solo con questo stratagemma delle curve, e non questo fiume o quello, ma tutti i fiumi, come se fosse una cosa obbligatoria, una specie di regola uguale per tutti, che è una cosa da non credere, veramente, pazzesca, ma è quello che hanno scoperto con scientifica sicurezza a forza di studiare i fiumi, tutti i fiumi, hanno scoperto che non sono matti, è la loro natura di fiumi che li obbliga a quel girovagare continuo, e perfino esatto, tanto che tutti, e dico tutti, alla fine, navigano per una strada tre volte più lunga del necessario, anzi per essere esatti, **tre volte virgola quattordici**, giuro, il famoso pi greco, non ci volevo credere, in effetti, ma pare che sia proprio così devi prendere la loro distanza dal mare, moltiplicarla per pi greco e hai la lunghezza della strada che effettivamente fanno,..."

Da **City** di Alessandro Baricco, ed. Rizzoli

Einstein fu il primo a suggerire che i fiumi tendono a seguire un percorso sempre più tortuoso perché la corrente, essendo più veloce sulla parte esterna di una curva, produce un'erosione maggiore sulla sponda corrispondente, così che la curvatura in quel punto aumenta. Più accentuata è la curvatura, più forte è la corrente sulla sponda esterna e di conseguenza maggiore è l'erosione. [...]. L'equilibrio tra questi due fattori opposti conduce a un rapporto medio che vale **pi greco** tra l'effettiva distanza in linea retta tra la sorgente e la foce. Il rapporto di pi greco si trova più comunemente in quei fiumi che scorrono attraverso pianure che hanno un dislivello molto tenue, come i fiumi in Brasile o nella tundra siberiana....

Da '**L'ultimo teorema di Fermat** di S. Singh, ed. Rizzoli

Valore "legale" di π: A Bill for an act introducing a new mathematical truth and offered as a contribution to education to be used only by the State of Indiana free of cost by paying any royalties whatever on the same, provided it is accepted and adopted by the official action of the Legislature of 1897.



Il popolo dello Stato della California, parte civile, contro Orenthal James Simpson, imputato

[*Quella che segue è la trascrizione di uno scambio di battute fra l'avvocato della difesa Robert Blasier e l'agente speciale dell'FBI Roger Martz, avvenuto il 26 luglio 1995 al processo di O. J. Simpson.*]

Blasier. Lei sa calcolare l'area di un cerchio di 5 millimetri di diametro?

Martz. Penso che saprei. Io non... sono un matematico... Non saprei dirlo così su due piedi.

B. Allora, qual è la formula per l'area del cerchio?

M. Pi greco per *R* al quadrato.

B. Che cos'è pi greco?

M. Ragazzi! Lei mi sta facendo un esame. 2,12..., 2,17...

Giudice Ito. **Che ne direbbe di 3,1214?**

B. Il pi greco non è una cosa che qualunque scienziato dovrebbe sapere?

M. Io penso di non avere più usato il pi greco dai tempi della scuola superiore.

B. Proviamo 3,12.

M. Ah, è quello il valore? C'è un modo più facile...

B. Proviamo 3,14. E qual è il raggio?

M. Sarebbe la metà del diametro: 2,5.

B. 2,5 al quadrato, giusto?

M. Giusto.

B. Vostro Onore, possiamo avere una calcolatrice?

[*Breve pausa.*]

B. Sa usare una calcolatrice?

M. Sì, penso di sì.

B. Mi dica quanto fa π per il quadrato di 2,5.

M. 19.

B. Vuole scrivere 19? Millimetri quadrati, giusto? L'area. Qual è un decimo di quest'area?

M. 1,9.

B. Lei ha calcolato erroneamente di un fattore due la grandezza, la grandezza minima di un campione di cui aveva bisogno per scoprire la presenza di acido etilendiammino-tetracetico, non è così?

M. Non so che cosa ho fatto o non ho fatto. Ho calcolato in modo un po' diverso. Non mi sono servito di questo metodo.

B. Vediamo, l'area cambia calcolandola con un metodo diverso?

M. Beh, tutte queste sono stime fatte a occhio. Non mi sono servito della matematica per determinarla.

La dimostrazione rigorosa dell'irrazionalità di π è stata data per la prima volta nel 1770 dal matematico Johann H. Lambert.

"Se x è un numero razionale allora $\tan x$ *è irrazionale, se* $\tan x$ *è razionale allora x deve essere irrazionale. Poiché* $\tan \frac{\pi}{4}$ *è razionale..."*

Poi Legendre (1794), ..., Niven (1947, Bull. AMS).

Qual è 'l geometra che tutto s'affige per misurar lo cerchio, e non ritrova, pensando, quel principio ond'elli indige.... (Paradiso, XXXIII).

La dimostrazione della effettiva insolubilità (della quadratura del cerchio) dovette attendere il 1882, quando F. von Lindemann provò la trascendenza di π.

Un numero *trascendente* è un numero irrazionale che non è soluzione di nessuna equazione polinomiale della forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, dove $n \geq 1$ e i coefficienti ai sono numeri razionali non tutti nulli.

Il simbolo π per la costante di Archimede è stato introdotto nel 1706 da William Jones nel volume *A New Introduction to Mathematics*, benché lo stesso simbolo fosse stato utilizzato in precedenza per indicare la circonferenza del cerchio.

La notazione diventò standard dopo Eulero.
In entrambi i casi π è la prima lettera di $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\sigma$ (perimetros), che significa "misura attorno" in greco.

Vogliamo presentare alcuni esempi, di natura probabilistica, in cui compare il numero π. Inaspettatamente ? Probabilmente no per i matematici usi a vedere, senza una spiegazione apparente, del numero π, l'irruzione del numero e, in molti momenti della matematica.

Può la probabilità dire qualcosa su π?

Nell'uso di metodi di simulazione (nei calcolatori) è necessario generare i cosiddetti "random numbers", ovvero numeri (pseudo)aleatori. Successioni di tali numeri sono usualmente ottenute risolvendo, in modo puramente deterministico, alcune equazioni algebriche (con congruenze, ecc...). Dobbiamo poi stabilire se tali successioni sono "veramente" aleatorie: una di queste procedure è il **Poker Test**.

Vediamo cosa dice esaminando il primo milione di cifre di π. L'idea che c'è dietro è quella di vedere se esistono oppure no dei "cammini" che possono ripetersi con una qualche regolarità.

Se pensiamo che ciò non sia pensiamo a "cammini indipendenti": il Poker Test è così chiamato perché si basa sui "cammini" del gioco del poker: invece delle carte abbiamo qui delle cifre. Diamo nomi (quasi) analoghi a gruppi di *cinque* cifre:

- *pokerissimo*: 5 cifre uguali
- *poker*: 4 cifre uguali (ed una quinta)
- *full*: 3 cifre uguali ed altre 2 uguali
- *tris*: 3 cifre uguali (ed altre 2)
- *doppia coppia*: 2 coppie di cifre uguali (ed una quinta cifra)
- *coppia*: 2 cifre uguali (ed altre tre cifre diverse)
- *nulla di buono*: 5 cifre diverse, non consecutive, ...

La probabilità di ciascuna delle precedenti configurazioni può essere calcolata definendo lo spazio $S = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ da cui lo spazio dei campioni $\Omega = S^5$.

Abbiamo, se $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{10^5}$.

Abbiamo allora:

- $\mathbb{P}\,(\,\textit{pokerissimo}) = \dfrac{10}{10^5} = 10^{-4}$.
- $\mathbb{P}\,(\textit{poker}) = \dfrac{450}{10^5} = 4.5 \times 10^{-3}$.
- $\mathbb{P}\,(\,\textit{full}) = 9 \times 10^{-3}$.
- $\mathbb{P}\,(\,\textit{tris}) = 7.2 \times 10^{-2}$.
- $\mathbb{P}\,(\,\textit{doppia coppia}) = 1.08 \times 10^{-1}$.
- $\mathbb{P}\,(\,\textit{coppia}) = 0.504$.
- $\mathbb{P}\,(\,\textit{nulla di buono}) = 0.3034$.

Ad es. $\mathbb{P}\,(\,\textit{full}) = \frac{1}{10^5} \times 10 \times 9$ (modi per scegliere la terna e la coppia) $\times 10$ (modi per "inserire" la terna fra i 5 numeri); $\mathbb{P}\,(\,\textit{nulla di buono}) = \frac{1}{10^5} \times 10 \times 9 \ldots 5$ (modi per scegliere la cinque cifre distinte fra dieci).

Vediamo anzitutto la frequenza delle cifre nel primo milione di cifre di π: abbiamo:

cifra	0	1	2	3	4
Freq.	99 959	99 758	100 026	100 229	100 230
cifra	5	6	7	8	9
Freq.	100 359	99 548	99 800	99 985	100 106

Per tali frequenze, l'intervallo di confidenza atteso è $[99\,400, 100\,600]$.

Usando un milione di cifre si possono fare 200 000 "mani". Nella tabella sottostante vediamo le frequenze teoriche (FT), le frequenze osservate (FO) e gli *intervalli di confidenza* (indicati con $[A, B]$).

mano	Nulla	Cop.	D.cop.	Tris	Full	Poker	P.mo
FT	60 480	100 800	21 600	14 400	1 800	900	20
FO	60 501	100 670	21 766	14 406	1 757	887	13
A	60 609	100 353	21 322	14 169	1 716	840	11
B	60 891	101 247	21 878	14 671	1 884	960	29

Gioco: La data di nascita 16081948 si trova subito dopo la 1443749-ma cifra di π ?.

Valori “normali” e intervalli di confidenza

CERTIFICATO UNI EN ISO 9001: 2000
FLEMING
ACCREDITATO S.S.N.

laboratorio di analisi cliniche

Mantova,
Medico

46100 MANTOVA
PROV: 2
Data Acc.:
Pr. Anno :

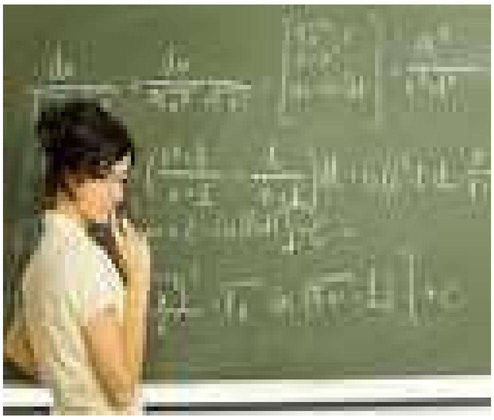
TELEFONO
M-01/04/1963(anni 44)

Esami di Laboratorio	Risultati	U.di Misura	Valori di Riferimento
ESAME EMOCROMOCITOMETRICO			
Eritrociti	4.42	x 10^6/mm^3	4.4 - 6.0
Emoglobina	14.4	g/100 ml	14 - 18
Ematocrito	41.5	%	41 - 51
Volume Globulare Medio	93.8	fl	80 - 96
MCH	32.5	pg	27 - 34
MCHC	34.6	g/100 ml	32 - 37
Piastrine	196	x 10^3/mm^3	140 - 440
Leucociti	5700	/mm^3	4000 - 10000
FORMULA LEUCOCITARIA:			
Granulociti Neutrofili	49.3	%	40 - 75
Granulociti Eosinofili	1.6	%	0 - 6
Granulociti Basofili	0.1	%	0 - 1.5
Linfociti	42.5	%	20 - 45
Monociti	6.5	%	0 - 10
CREATININEMIA	0.91	mg/100 ml	UOMO fino a 1.20 DONNA fino a 0.90
POTASSIEMIA	4.05	mEq/l	3.5 - 5.0
BILIRUBINA FRAZIONATA			
Bilirubina totale	* 1.01	mg/100 ml	Fino a 1.00
Bilirubina diretta	* 0.28	mg/100 ml	Fino a 0.25
SIDEREMIA	78	mcg/100 ml	UOMO 55 - 170 DONNA 50 - 150

April 27, 2009

Obama's Speech to the National Academy of Sciences

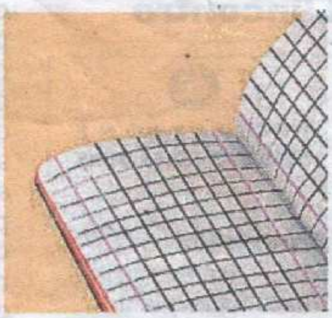
I want you to know that I'm going to be working alongside you. I'm going to participate in a public awareness and outreach campaign to encourage students to consider careers in science and mathematics and engineering – because our future depends on it.



250 Milioni per la matematica è la lezione americana

Duecentocinquanta milioni di dollari destinati a migliorare l'insegnamento della matematica e della scienza «per aiutare la nazione a competere nei settori chiave con i rivali dell'economia globale», annuncia l'Amministrazione Obama. Ogni crisi si affronta dalle radici e non a caso matematica e scienze sono ritenute alla base del cambiamento, tanto da unire due visioni politiche diverse.

In uno dei suoi ultimi discorsi sullo Stato dell'Unione anche l'ex presidente George W. Bush aveva evocato un maggior impegno nella scienza dei numeri. Ora il successore continua sulla stessa linea messa in pratica con il lancio della campagna «Educate to Innovate» definendola una «priorità nazionale per il prossimo decennio». Dalle parole ai fatti con uno stanziamento adeguato che unisce pubblico e privato e che rappresenta solo un primo passo. Importante, però, perché consente di preparare 10 mila nuovi insegnanti e di migliorare le qualità di altri centomila.



La formula dell'operazione è interessante perché coinvolge direttamente anche i grandi protagonisti industriali, da Intel a Xerox, da Time Warner Cable a Eastman Kodak, sia nel sostegno che nella promozione dell'iniziativa. Intel, ad esempio, garantirà 200 milioni in dieci anni nel perfezionamento degli insegnanti di matematica e nello stesso tempo offre un corso di 80 ore ai docenti elementari generici per accrescere le loro cognizioni nella disciplina.

Uomini d'affari e di governo hanno manifestato una crescente preoccupazione per il rischio che gli Stati Uniti possano perdere il controllo delle tecnologie avanzate che hanno alimentato la loro economia nel XX secolo. Di recente i test internazionali di matematica hanno collocato, meglio retrocesso, gli Usa tra la quarta e l'ottava posizione in alcune aree rispetto all'Europa e all'Asia. Se si vuole essere economicamente competitivi e continuare a innovare creando lavoro bisogna studiare più matematica e scienze, dicono a Washington. Difficile dargli torto. E se provassimo ad imitarli?

Giovanni Caprara

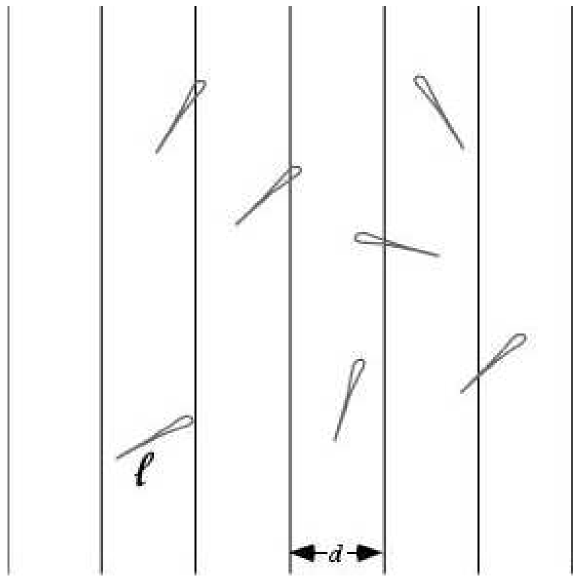
Quando π è collegato alla probabilità

Iniziamo dal primo "storico" esempio di collegamento fra il numero π e la probabilità:

Il problema dell'ago di Buffon

Il *problema dell'ago di Buffon* tratta il seguente evento:

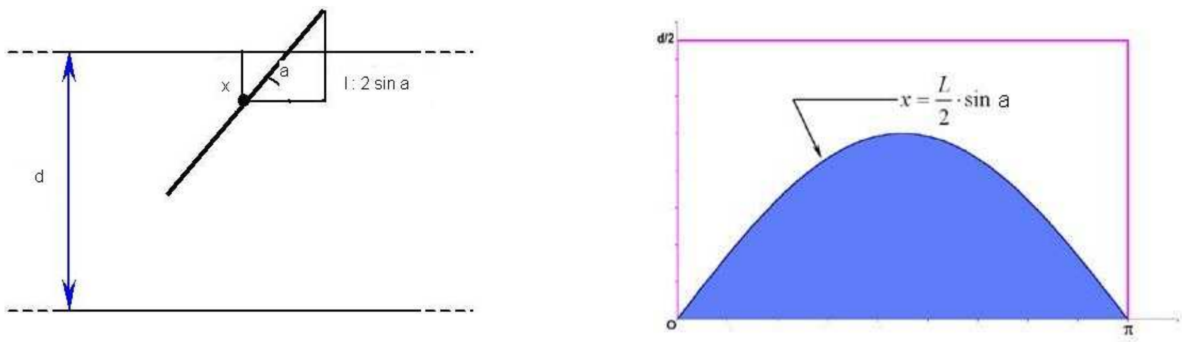
Un ago di lunghezza l viene gettato *a caso* in un pavimento (matematicamente infinito) formato da linee parallele (tipo parquet), distanti d l'una dall'altra. Supponiamo anzitutto che $l < d$



Le cose che possono accadere sono due: o l'ago incontra una delle righe oppure cade tra una riga e l'altra. Qual è la probabilità che l'ago intersechi una delle righe (Vedere Figura)?

Dobbiamo comunque precisare cosa vuol dire “a caso”: lo facciamo supponendo che ogni **orientazione**, ovvero ogni angolo fra l’ago ed una delle righe ed ogni **posizione** del suo centro siano due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme (cioè “equiprobabili”); sia a l’angolo di orientazione e sia x la distanza del centro dalla retta più vicina. Come possiamo vedere dalla Figura 2, la condizione “favorevole”, cioè la condizione per cui l’ago incontra una retta sarà:

$$x < \frac{l}{2} \sin a.$$



Da qui siamo condotti ad una “probabilità geometrica”. Si tratta cioè, nelle ipotesi in cui ci siamo messi di calcolare un’area “favorevole” ed un’area “possibile”. Quest’ultima ci è subito data dalle condizioni geometriche ovvero

$$0 \leq x \leq \frac{d}{2}, \qquad 0 < a < \pi.$$

L’area possibile è dunque l’area del rettangolo $[0, \frac{d}{2}] \times [0, \pi]$. L’area favorevole è data dall’area della parte di piano, inclusa nel rettangolo precedente e dalla condizione $0 < x < \frac{l}{2} \sin a$. Abbiamo pertanto

$$\mathbb{P} = \frac{\text{area favorevole}}{\text{area possibile}} = \frac{\frac{l}{2}\int_0^\pi \sin a\, da}{\frac{\pi d}{2}}.$$

Un semplice calcolo ci dà:

$$\mathbb{P} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Pertanto se su N prove si sono avuti r successi, cioè l'ago **non** ha intersecato r volte una delle rette, la stima $\mathbb{P} = \dfrac{r}{N}$ può essere "confrontata" (*) con il risultato trovato, ovvero $\mathbb{P} = \dfrac{2l}{\pi d}$. Possiamo anche scrivere

$$\frac{r}{N} = \frac{2l}{\pi d} \quad \text{ovvero} \quad \pi = \frac{2lN}{rd}.$$

Adesso l'unica incognita è, quindi, ... π. !!

*

* *

---

*(Siamo in ipotesi per cui, secondo un famoso risultato di Bruno de Finetti, l'assegnazione di probabilità può legittimamente essere vista in senso frequentista.)

Dalla metà del 1800 molti sono stati i matematici che hanno cercato, attraverso questa strada di approssimare il valore di π.

Ecco una tabella relativa ad alcune prove sperimentali per stimare $\mathbb{P}$ dal problema di Buffon.

Chi	Anno	N. prove	prove OK	Valore
Wolf	1850	5000	2532	3.1596
Smith	1855	3204	1218.5	3.1553
De Morgan	1860	600	382.5	3.1137
Fox	1864	1030	489	3.1419
Lazzarini	1901	3408	1808	3.141592

Il valore trovato da Mario Lazzarini all'inizio del 1900 ha naturalmente destato alcuni sospetti (sulla sua precisione): ad esempio è noto che Lazzarini scelse un "ago" che avesse una lunghezza pari ai 5/6 della distanza fra le righe ed un numero opportuno di lanci, cercando di approssimare π con $\dfrac{355}{113} = 3.14159\overline{292}$.

$\dfrac{355}{113}$ è un'approssimazione di π al 99.9999%.

Tsu Ch'ung Chi (430-501 AD, $\dfrac{355}{113}$).

Niente di illecito ma solo un buon aiuto *numerico* !

Nota 1: Il problema è stato posto nella letteratura per la prima volta dal naturalista francese Georges-Louis Leclerc, Conte di Buffon nel 1777.

Tale metodo è considerato uno dei precursori del Monte Carlo, metodo di simulazione che valuta una serie di realizzazioni possibili del fenomeno in esame, "pesato" con la probabilità corrispondente. Una volta calcolato il valore del campione, la simulazione affronta le "misure" delle grandezze di interesse. La simulazione Monte Carlo è ben eseguita se il valore medio di queste misure sulle realizzazioni del sistema converge al valore vero (Teorema limite centrale del Calcolo delle Probabilità). Esso può anche essere considerato una tecnica numerica per calcolare integrali. Anche se sembra che il suo primo creatore sia Laplace si è soliti far risalire il Metodo alla metà degli anni '40 nell'ambito del Progetto Manhattan. Lo storico matematico N.C. Metropolis, che sembra avergli assegnato il nome in riferimento al celebre casinó, ricorda che *Fermi had invented, but of course non named, the present method when he was studying the moderation of neutrons in Rome* e che, in seguito, i formalizzatori del metodo furono J. von Neumann e S. M. Ulam.

Nota 2: È stato anche studiato il caso in cui la lunghezza dell'ago è maggiore della della distanza fra due righe adiacenti. In tal caso, se $x = \frac{l}{d}$, si può determinare la funzione di distribuzione relativa; si ha cioè che la probabilità che l'ago intersechi almeno una riga è data da::

$$\mathbb{P}_x = \frac{2}{\pi}(x - \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin x).$$

Anche in questo caso non è sorprendente la comparsa di π !

La probabilità che due numeri (naturali) scelti a caso siano primi fra loro

La questione precedente può essere affrontata nel modo seguente:

Siano m ed n due numeri naturali e sia p un (qualunque) numero primo. È chiaro che i numeri naturali divisibili per p sono $\frac{1}{p}$ (in quanto p ne divide uno ogni p numeri). Allora la probabilità che p divida m (ed n) è dato da $\frac{1}{p}$.

La probabilità che p **non** divida m ed n, supponendo, come è naturale, l'indipendenza probabilistica fra questi due eventi, è data da $\mathbb{P} = 1 - \frac{1}{p^2}$

Pertanto la probabilità che m ed n siano primi fra loro (ovvero non abbiano in comune un fattore primo) è data – sempre nell'ipotesi di indipendenza probabilistica – da:

$$\mathbb{P} = \prod_{p=2}^{+\infty}(1 - \frac{1}{p^2}).$$

Osservando che $0 < p < 1$ e ricordando lo sviluppo in serie (di potenze) di una serie geometrica, ovvero

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$1+x+x^2+x^3+\ldots,$$

abbiamo:

$$\mathbb{P} = [(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots)(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots)(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\ldots)(\ldots)]^{-1}.$$

Per il Teorema fondamentale della fattorizzazione (e dell'unicità della stessa) (*) l'espressione precedente è equivalente a:

$$\mathbb{P} = [1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots]^{-1}.$$

Adesso è il momento di ricordare la somma della seguente serie (†):

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

---

*Ogni numero naturale può essere espresso in un unico modo come prodotto di numeri primi.

†La somma della serie in questione ha una lunga storia: l'inizio risale ad Eulero che ne trovò la somma anche usando metodologie in seguito ritenute non perfettamente rigorose. Da allora la somma è stata confermata ed i metodi del calcolo della somma sono numerosi ed assai vari nell'uso degli strumenti matematici.

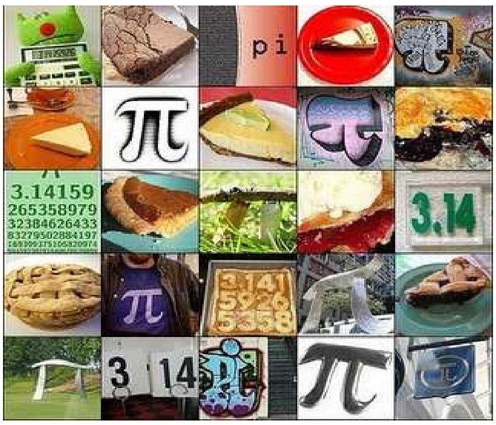
Abbiamo allora che la richiesta probabilità (che due numeri (naturali) scelti a caso siano primi fra loro) è data da:

$$\mathbb{P} = (\frac{\pi^2}{6})^{-1} \approx 0.6079271...$$

Nota: Indipendentemente dal tipo di libro, dalla lingua (e dal linguaggio) in cui è scritto, la probabilità che una parola appaia, nel libro, N volte è data dal numero:

$$\mathbb{P}(N) = \frac{6}{N\pi^2}.$$

(versione della legge di Zipf).



* * *

Alcuni esempi

- Sia dato un frutteto a forma di griglia rettangolare. Se si scelgono due alberi a caso la probabilità che da uno si possa "vedere" l'altro (senza altri alberi in mezzo) è $\frac{6}{\pi^2}$.

- Se si lanciano $2N$ monete, la probabilità di avere esattamente N Teste è data (circa) da $\sqrt{\frac{1}{\pi N}}$.

- Si prendono 3 bastoncini (della stessa lunghezza) e si spezzano "a caso" in due parti.

  Allora la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo acutangolo è data da $1 - \dfrac{\pi}{4}$.

- Disegnando una corda all'interno di un cerchio, il valore atteso della sua lunghezza è dato da $\frac{128r}{45\pi}$.

- La somma degli angoli (solidi) vertici di un tetraedro T, diviso per 2π, dà la probabilità che la proiezione ortogonale di T, su un piano scelto a caso, sia un triangolo.

“Paradosso di Bertrand”

Bertrand (Parigi, 1822 - 1900), ingegnere minerario, è stato un importante matematico, economista e storico (della scienza).

Sua congettura (dimostrata da Cebicev): Pour tout entier n supérieur à 2, il existe au moins un nombre premier compris entre n et 2n.

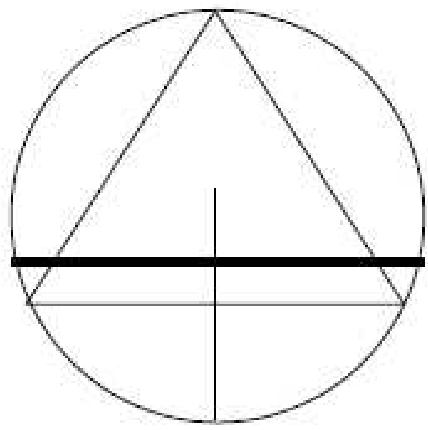
“Paradosso di Bertrand”: **Tracciamo a caso una corda in un cerchio. Qual è la probabilità che tale corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio ?**

Affrontiamo questo problema in 4 modi diversi !!

caso I

Iniziamo a considerare tutte le corde parallele ad una direzione fissata. La lunghezza massima della corda (per non superare la lunghezza del lato del triangolo inscritto) è “gestita” dalla distanza del centro del cerchio dal punto medio del lato (del triangolo) ad essa corrispondente: tale distanza vale $\frac{r}{2}$ (se r è il raggio del cerchio).

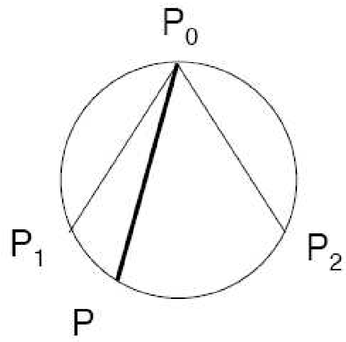
(Tutti i lati del triangolo equilatero inscritto hanno tale distanza dal cerchio del cerchio ed essa non dipende dalla "rotazione" del triangolo nel cerchio).



Pertanto, considerando il diametro ortogonale alle corde date, il suo punto di mezzo appartiene ad un segmento (del diametro) che è lungo quanto il raggio Tale ragionamento è valido per tutte le direzioni: dunque, essendo la lunghezza massima *possibile* r e la *lunghezza favorevole* $\frac{r}{2}$, la probabilità cercata vale $\mathbb{P} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$

caso II

Adesso, possiamo fissare, per ragioni di simmetria, una delle estremità A della corda su un punto del cerchio: l'altra estremità B sarà scelta "a caso" sulla circonferenza. La probabilità che il punto B appartenga ad un certo arco di circonferenza è proporzionale alla lunghezza dell'arco (rispetto all'intera circonferenza). Dalla figura vediamo che la lunghezza massima della corda (per non superare la lunghezza del lato del triangolo inscritto) è "gestita" dalla posizione del punto B: .

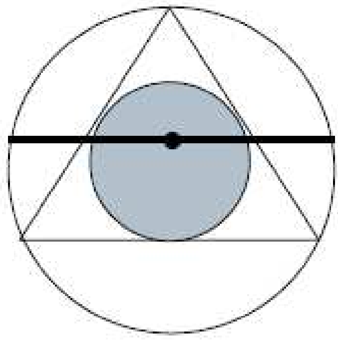


la circonferenza viene divisa in tre parti (uguali) dai vertici del triangolo equilatero (che, senza perdere in generalità possiamo chiamare ABC). Se cade in BC si hanno *casi favorevoli*; dunque, essendo la lunghezza massima *possibile* $2\pi r$ e la *lunghezza favorevole* $\frac{2\pi r}{3}$, la probabilità cercata vale $\mathbb{P} = \frac{\frac{2\pi r}{3}}{2\pi r} = \frac{1}{3}$.

Caso III

Supponiamo adesso di avere fissato un cerchio e di scegliere, "a caso", un punto P all'interno del cerchio. La lunghezza massima della corda è ora "gestita" dalla posizione del suo punto medio: scegliere il punto P equivale a scegliere il punto medio della corda e la probabilità richiesta equivale alla probabilità che il punto P appartenga ad un cerchio C^*, di raggio $\frac{r}{2}$, concentrico col cerchio dato (ed inscritto nel triangolo equilatero).

In questo caso i punti *favorevoli* sono quelli del cerchio C^* ed i punti *possibili* sono quelli del cerchio C dato. Si tratta allora di calcolare il rapporto

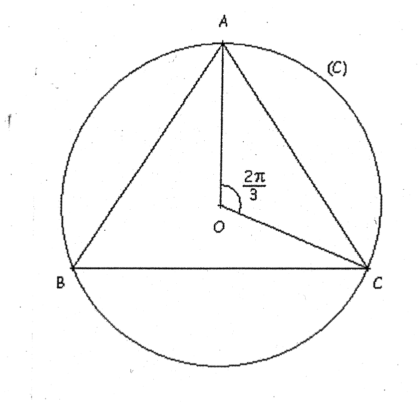


fra l'*area favorevole* e l'*area possibile*. Abbiamo

$$\mathbb{P} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

caso IV

Tracciamo ora una corda "a caso" (nel cerchio) e cerchiamone la lunghezza. Se r è il raggio del cerchio C, la lunghezza della corda è ovviamente compresa fra 0 e r.La lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio C (di raggio r) è dato da $r\sqrt{3}$ (ottenibile sia dalla geometria elementare, sia con semplici considerazioni trigonometriche). Essendo la misura (di un segmento) una funzione continua, la probabilità richiesta è data dal rapporto fra la lunghezza massima *favorevole*, cioè dalla lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio C, e la lunghezza massima *possibile*, ovvero la lunghezza del diametro del cerchio C. La probabilità cercata vale dunque $\mathbb{P} = \frac{2r - \sqrt{3}}{2r} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.



È possibile dimostrare che, analogamente, si possono avere tutti i valori compresi fra $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{4}$ (dunque anche $\mathbb{P} = \frac{2}{\pi} \ldots !$).

Abbiamo visto che si possono ottenere infiniti risultati diversi. Le precedenti 4 ipotesi sembrano tutte ugualmente realizzabili.

Si possono gettare cannucce su un piccolo cerchio, si può far rotolare un tronco d'albero su un pavimento con un cerchio disegnato sopra, si può far ruotare un cerchio attorno ad un punto (della circonferenza) su un pavimento rigato; ciascuna delle precedenti risposte (corrette) è la risposta ad un particolare esperimento probabilistico.

Se riflettiamo sul fatto che "calcolare una probabilità" significa trovarsi comunque di fronte ad un esperimento *reale*; talvolta l'esperimento non è dettagliatamente descritto ma la descrizione è evidente dal contesto. Nel caso di una "corda scelta a caso" l'enunciato non dà alcuna indicazione circa l'esperimento in oggetto (a meno di non aggiungere chiarimenti). L'espressione "a caso" NON ha un senso intrinseco: le corde (possibili) sono infinite: l'infinito NON è un numero e quindi *scegliere a caso* fra infiniti casi NON è un'indicazione sufficiente.

Non siamo pertanto di fronte ad unn vero paradosso ma ad una acuta riflessione sul "limite" della definizione di probabilità

È possibile individuare una risposta "esatta": NO, perchè non ci sono risposte errate ma solo un problema mal posto !

Da un punto di vista strettamente matematico la prima può essere vista come l'unica soluzione che soddisfa le invarianti di trasformazione che sono presenti in alcuni sistemi fisici, come ad esempio in meccanica statistica e in fisica dei gas.