Carla Simonetti - Mathesis Firenze

GEOMETRIA ANALITICA: UN PERCORSO STORICO

“assume un’importanza affatto speciale la storia della scienza dalla quale vuolsi apprendere non tanto la notizia erudita, quanto la considerazione dinamica dei concetti e delle teorie”

Federigo Enriques

Protagonisti:

Apollonio di Perga	262?-190? a.C.
Rafael Bombelli	1526?-1574?
François Viete	1540 - 1603
Galileo Galilei	1564 - 1642
Pierre de Fermat	1601 - 1665
Renè Descartes	1596 - 1650

APOLLONIO DI PERGA (262?-190? a.C.)

Apollonio insieme ad Euclide ed Archimede è il protagonista di quel periodo storico che è considerato “Età aurea della Matematica greca”.
Secondo testimonianze successive egli fu artefice di moltissime opere di matematica e astronomia. Solo due (Sezioni di un rapporto, Coniche) però ci sono pervenute in forma quasi completa, in gran parte grazie all’opera di matematici-traduttori arabi.
L’opera sua più importante è *Le Coniche* in cui tratta le sezioni coniche. Queste erano state studiate per la prima volta da Menecmo (IV sec. A.C.) ed erano per ciò chiamate *Triadi di Menecmo*, ma ellisse, parabola, iperbole, venivano costruite come sezioni di piani perpendicolari a una generatrice con coni circolari retti di tre tipi diversi a seconda che l’angolo al vertice fosse rispettivamente acuto, retto, ottuso.
Rileviamo che le coniche non sono definite dai greci come luoghi geometrici, ma come sezioni.

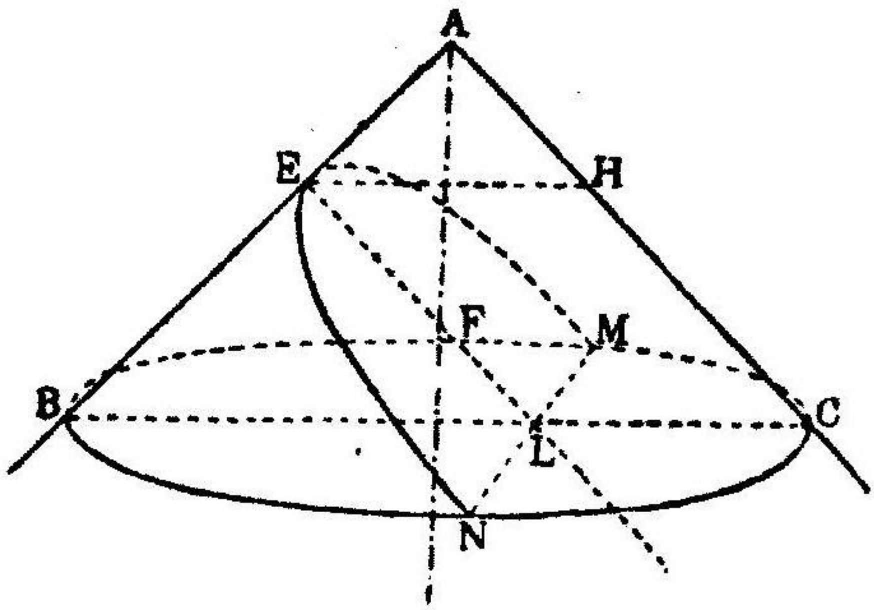
Apollonio:
1 - Ottiene i tre tipi di sezioni operando su uno stesso cono intersecato con piani variamente inclinati.
2 – Dimostra che le proprietà delle curve non cambiano se il cono è obliquo
3- Introduce il cono a due falde, in tal modo l’iperbole diventa una curva con due rami.
4 – Definisce il cono circolare “*Se una retta, prolungatesi all’infinito e passante sempre per un punto fisso, viene fatta ruotare lungo la circonferenza di un cerchio che non si trovi nello stesso piano del punto in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta che ruota traccerà la superficie di un cono doppio*”.
5 – Introduce i nomi ellisse (mancanza), parabola (confrontare), iperbole (lanciare al di là).

Apollonio e il metodo delle coordinate

Apollonio per studiare una conica considera fissa una retta del suo piano chiamata diametro da alcuni suoi traduttori e ascissa da altri, diametro sarà anche il termine usato da Cartesio e Fermat. Sarà Leibniz a darle definitivamente il nome di ascissa.
Considera poi un sistema di rette parallele, **ordinatamente applicate** al diametro (da cui successivamente il termine ordinata), e individua, per ciascun tipo di coniche, una relazione che i segmenti di tali rette compresi tra la curva e il diametro (le nostre ordinate)

hanno con i corrispondenti segmenti del diametro (le nostre ascisse). Tale relazione geometrica (sintomo) è l' equivalente della nostra equazione canonica e partendo da essa Apollonio determina le altre proprietà delle curve. Nasce così il metodo delle coordinate.

Riportiamo un esempio considerando il cono rettangolo con sezione parabolica; sia EL l'asse della sezione, BNCM la sezione circolare del cono con un piano perpendicolare all'asse del cono stesso, sia NM l'intersezione della conica con tale sezione e F l'intersezione dell'asse della conica con l'asse del cono:



LM è medio proporzionale tra BL e LC, quindi :

$LM^2 = BL \cdot LC$ e inoltre $BL = \sqrt{2} \cdot EL$, $LC = EH = \sqrt{2} \cdot EF \longrightarrow LM^2 = 2EF \cdot EL$

Variando il piano della sezione circolare varia la lunghezza di EL, NM si sposta in N'M' conservando la direzione e il corrispondente L'M' individua un nuovo punto M' sulla parabola la quale può essere così costruita per punti e inconsciamente individuata come luogo geometrico.

EL (EL'….) e LM (L'M'….) sono quelle che noi chiamiamo rispettivamente ascissa e ordinata. Utilizzando questi termini possiamo affermare che per i punti della parabola **i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle corrispondenti ascisse .**

[Indicando con k il parametro 2EF secondo la nostra simbologia si ottiene $y^2=kx$]

Osserviamo che si ha una origine E, una semiretta per le ascisse e per le ordinate un insieme di segmenti paralleli tra loro.

RAFAEL BOMBELLI (1526?- 1574?)

Le poche notizie che si hanno sulla vita di Rafael Bombelli sono dedotte dalle affermazioni che lui stesso fa nel suo libro “Algebra”. Egli si definisce “cittadino bolognese” e si è potuto accertare che la famiglia Bombelli apparteneva alla nobiltà del contado bolognese. Nel 1572 pubblica i primi tre libri della sua opera che trattano esclusivamente di algebra e in cui tra l’altro vengono introdotti i numeri che saranno in seguito chiamati immaginari. Dare significato alle radici quadrate di numeri negativi era una intuizione che possiamo considerare estremamente ardita se pensiamo che in quel momento storico i numeri negativi in Europa venivano scartati come coefficienti e come risultati nelle equazioni ed erano chiamati numeri assurdi. Il manoscritto dei due successivi libri, dedicati alla geometria, sarà ritrovato nel 1923 presso l’Archiginnasio di Bologna dallo storico della matematica Bortolotti che pubblicherà l’opera completa.

Bombelli e i numeri negativi.

Bombelli dà regole specifiche per l’uso de numeri negativi (che però esclude come valori dei coefficienti delle equazioni e come radici):

Moltiplicare di più e meno

Più via più fa più.
Meno via meno fa più.
Più via meno fa meno.
Meno via più fa meno

Esempi di *numeri composti, come se fossero binomi* […] *se si haverà a moltiplicare (6+4) via (5-2)* […].

$$\begin{array}{c} 6 + 4 \\ 5 - 2 \\ \hline 30 + 20 - 12 - 8 \end{array}$$

In maniera analoga vengono date le regole del:

Partire più e meno - Sommare più e meno - Sottrare del più e meno

Bombelli e i numeri immaginari.

Bombelli dà regole specifiche per l'uso de numeri immaginari. Chiama ***più di meno*** l'unità immaginaria che noi chiamiamo i, e ***meno di meno*** il suo opposto –i e scrive:

Più di meno via più di meno, fa meno	[$i \cdot i = -1$]
Più di meno via men di meno, fa più	[$i \cdot (-i) = 1$]
meno di meno via più di meno, fa più	[$-i \cdot i = 1$]
Meno di meno via men di meno, fa meno	[$-i \cdot (-i) = -1$]

Nel risolvere l'equazione di secondo grado $x^2 + 20 = 8x$ Bombelli trova la radice quadrata di 16-20 = -4 e scrive: "*4 + di - 2 over 4 - di – 2, e ciascuna di queste quantità da sé sarà la valuta del Tanto".*

Per compiere operazioni tra numeri di questo tipo (noi li chiamiamo complessi) saranno utili a Bombelli le regole già esposte per i binomi.

Scrive Bortolotti: "*Qui, per la prima volta, si considerano come enti aritmetici numeri immaginari, si rappresentano questi con simbolismo opportuno al lor calcolo, e le leggi di questo calcolo vengono effettivamente poste, …..*"

Bombelli e il rapporto Algebra - Geometria

Due prese di posizione di Bombelli interessano questa nostra conversazione, una all'inizio e una alla fine del testo originale.

- Nella introduzione "*A gli Lettori*" scrive: "***ne meno parmi necessario sia che si sforzi di far conoscere che la parte maggiore dell'Aritmetica (hoggi dal vulgo Algebra detta) tenghi ella sola tra queste* [le discipline matematiche] *il primato, perché di lei tutte l'altre bisogna che si prevagliano, né già potriano così l'Aritmetico come il Geometra senza quella sciogliere i problemi suoi e provare le sue dimostrazioni".***

Nel XVI secolo vera scienza matematica era ancora, in linea con il pensiero greco, soltanto la geometria attraverso la quale doveva essere giustificata ogni questione algebrica.

Bombelli supera questo atteggiamento e rivaluta l'algebra stessa come scienza.

Nei suoi due libri geometrici che avrebbero dovuto accompagnare i tre algebrici, egli espone una geometria che si evolve utilizzando strumenti algebrici e che chiama "*algebra linearia*" in quanto si esprime attraverso segmenti. I due rami della matematica assumono pari dignità, operano secondo un reciproco sostegno, e costituiscono una sorta di società di mutuo soccorso. Nella prefazione all'opera del Bombelli ristampata nel 1966, Forti scive: "*...la validità della costruzione geometrica risulta dallo svolgimento algebrico (e perciò logico) di cui essa è la visibile interpretazione*"

- A chiusura del terzo libro Bombelli afferma che Aritmetica e Geometria sono **l'una "*la prova dell'altra*" e l'altra "*la dimostrazione dell'una*" e che questo sarà chiaro quando "*l'una e l'altra mia opera avranno veduta, ma perché non è ancora ridutta a quella perfezione che la eccellentia di questa disciplina ricerca, mi son risoluto di volerla prima meglio considerare, avanti che la mandi nel cospetto degli huomini*".**

Bombelli muore poco dopo la pubblicazione del suo libro, nulla sappiamo su come avrebbe voluto operare sulla parte geometrica, ma già così come ci è giunta essa segna "***quasi un punto di passaggio, e talvolta una vera anticipazione, della geometria analitica di Cartesio***" (Forti).

Per realizzare questa sorta di connubio tra algebra e geometria, è necessario disporre di una possibilità di traduzione dei rispettivi linguaggi. Bombelli pone le basi per questo "dizionario".

Operazioni tra numeri↔operazioni tra segmenti

Nel capitolo primo del libro quarto Bombelli esprime attraverso procedimenti geometrici le operazioni algebriche e facendo ciò introduce alcuni concetti basilari per la geometria analitica:

Sommare di linee – Sotrare di linee – Moltiplicare di linee – Partire di linee

Segmenti positivi e segmenti negativi

Libro quarto – Capitolo primo – Proposizione 16

Sotrare di linee

Il sotrare di linee non è altro, che tagliare della maggiore una parte pari alla minore, quando la minore si ha da cavare della maggiore, et quello che resta fuora del taglio sarà il restante; ***ma se si harà a cavare la maggiore della minore si farà il medesimo et quello che resta sarà meno.***

Questo è un passo molto ardito e significativo che non sarà compiuto neanche da Cartesio.

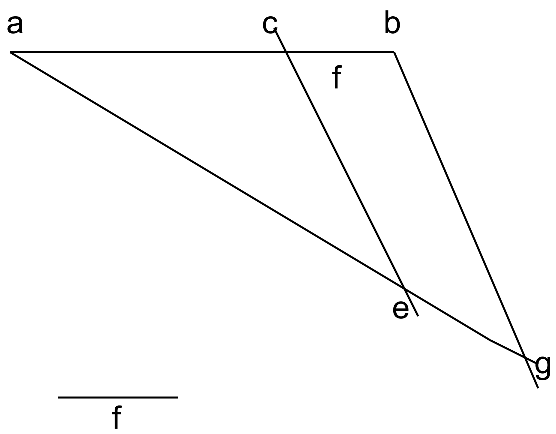
Segmento unitario

Libro quarto – Capitolo primo – Proposizione 18

Introduzione del segmento unitario:

Partire di linee

Il partire di linee non si può fare se non è dato una comune misura*; come sarebbe se si avesse a partire la linea .a.e. per la .a.c., et non dicendo altro non si possono partire, ma se si darà la .f. per comune misura, ……..*



bg // ce

Il segmento unità è usato dal Bombelli anche nella parte algebrica della sua opera nelle giustificazioni geometriche delle risoluzioni delle equazioni di terzo grado.

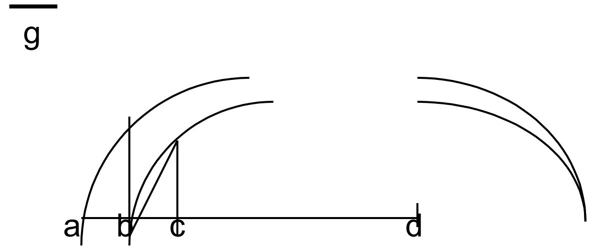
Libro quarto – Capitolo primo – Proposizione 19

Bombelli esprime attraverso procedimenti geometrici le operazioni di radice quadrata e radice cubica:

A trovare il creatore in linee [creatore → radice quadrata]

….. il quale creatore non patisce le difficoltà che pate nel numero; perché sempre si troverà il creatore di ogni preposta linea, essendo noto la comune misura,come per esempio sia la linea .b.d. la quale sia 7 cioè sette volte la linea .g. et che si detta linea se ne voglia il creatore.

Sceglie un segmento come unità di misura e procede geometricamente applicando i teoremi che noi chiamiamo primo e secondo di Euclide.



Questo procedimento era già stato esposto nel libro primo dove si legge esplicitamente: "*Sia la linea .a. una misura data per la unità*"

Potenze e prodotti di segmenti

Libro quarto – Capitolo primo – Proposizione 21

In questa proposizione Bombelli, precedendo Cartesio, rappresenta con segmenti anche le potenze. Si tratta di un passaggio fondamentale per tradurre in forma geometrica le espressioni aritmetiche superando la loro rigida interpretazione geometrica che portava, tra l'altro, i matematici a trattare solo quelle con esponenti inferiore a quattro.
L'*Algebra* di Bombelli godrà di grande notorietà in tutta Europa ed è probabile che anche Cartesio la conoscesse, inoltre questa proposizione è inserita anche nel libro secondo dei tre pubblicati dove, per la dimostrazione geometrica della risoluzione di equazioni di terzo grado, Bombelli rappresenta il binomio $x(x^2+p)$ con un rettangolo nel quale uno dei lati ha lunghezza x e l'altro è somma di due segmenti di lunghezza rispettivamente x^2 e p.
Scrive Bortolotti: "*non è quindi lecito che a quest'ultimo* [Cartesio] *sia attribuito quel passo che al dir degli storici costituisce così essenziale progresso nella rappresentazione analitica delle grandezze geometriche*"

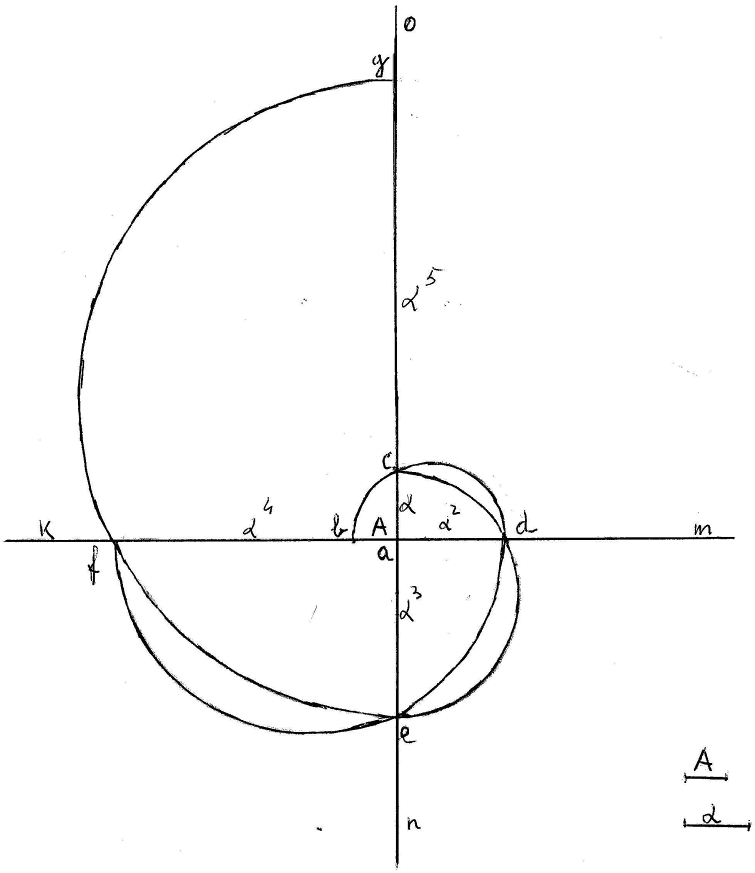
Dimostrazione della lunghezza delle dignità essendo nota la cosa

Viene proposta la costruzione geometrica delle successive potenze di un numero espresso attraverso un segmento.
Sia A il segmento unitario e α il segmento di cui si vogliono determinare le potenze. Si tracciano due rette perpendicolari km ed no che si incontrano in un punto a.
Si procede attraverso successive applicazioni del secondo teorema di Euclide.
In riferimento alla figura sia ab=A e ac=α, si traccia il semicerchio che passa per b e per c ed ha il centro su km, si individua così il punto d su km. Il segmento ad è "la valuta del censo" (quadrato).
Si traccia il semicerchio passante per c e d e avente il centro su no, si individua il punto e su no, ae è il "cubo". Si procede analogamente, si traccia il semicerchio def, af è il "Censo Censo" (quarta potenza), e così via.

"*Sia la comune misura […] la linea A*" "*la linea* α *sia la valuta della cosa*"

ad ⟶ Censo (α^2)   af ⟶ Censo Censo (α^4)

ae ⟶ Cubo (α^3)   ag ⟶ Censo Cubo (α^5)



I Bourbaki scrivono: "*Una volta scelta l'unità di lunghezza, esiste una corrispondenza biunivoca fra le lunghezze ed i rapporti di grandezze, egli* [Bombelli] *definisce, sulle lunghezze, le diverse operazioni algebriche (supponendo, si intende, fissata l'unità) e, rappresentando i numeri con le lunghezze, ottiene la* ***definizione geometrica del corpo dei numeri reali*** *(punto di vista di cui spesso si attribuisce il merito a Descartes) e dà così alla sua 'Algebra' una solida base geometrica*"

Manca a Bombelli il passo definitivo dell'introduzione della simbologia algebrica all'interno del linguaggio geometrico.

Osservazione:

Nelle "*Indicazioni nazionali per gli obiettivi specifici di apprendimento*" per le Superiori della nuova riforma, alla voce "*Aritmetica e algebra*", tra le "*competenze attese a*

conclusione dell'obbligo di istruzione" troviamo: "*utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica*"
Da Bombelli, come abbiamo visto, può venire qualche interessante suggerimento in tal senso.

RRANÇOIS VIETE (1540-1603)

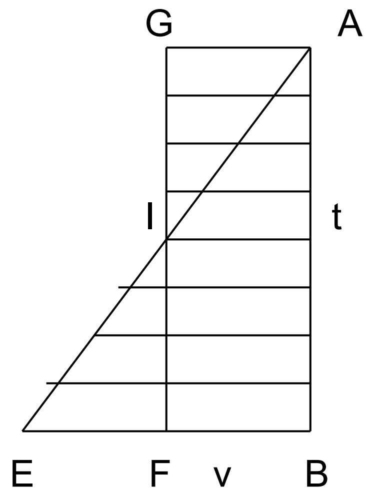
Avvocato e consigliere di Enrico V di Francia Viete si occupa di matematica nei periodi in cui è libero da impegni ufficiali. Non precisa le fonti a cui attinge non possiamo quindi sapere se gli fosse nota l' *Algebra* di Bombelli.
Nel 1591 pubblica il suo libro *Artem analyticem isagoge* [introduzione] in cui sono posti alcuni dei fondamenti dell'algebra anche se il suo pensiero matematico rimane strettamente legato alla geometria. È per quanto riguarda la simbologia che vengono da lui introdotte forme nuove ed efficienti, tra l'altro il concetto di parentesi che esprime attraverso una linea orizzontale posta sopra i termini interessati. Ma Viete segue la "legge di omogeneità" secondo cui non si possono sommare o sottrarre tra loro se non termini che siano assimilabili a grandezze geometriche di uguali dimensioni; scrive:
A cubis – B in A quad + B quad in A aeq. B quad in Z che sta per:
$a^3 - b\,a^2 + b^2a = b^2z$. In questo modo ciascun termine rappresenta un volume.
Atteggiamento ben diverso rispetto a Bombelli il quale arriva ad esprimere attraverso segmenti le potenze.
Viete distingue tra "*algebra numerosa*" in cui i dati sono numeri, e "*algebra speciosa*" in cui i dati sono quantità di qualsiasi genere, oggetti non espressi in termini numerici, ma attraverso lettere (vocali per le incognite, consonanti per le quantità assegnate) che permettono di trattare le varie situazioni in maniera numerica o geometrica. In questo modo viene proposto un rapporto tra geometria e algebra in cui le lettere fanno da ponte tra numeri e grandezze: lettura geometrica delle formule algebriche e, viceversa, espressione algebrica delle relazioni geometriche. Si fa così strada il concetto generatore della geometria analitica la quale costituisce un metodo algebrico generale per risolvere problemi geometrici.
"*Si instaura dunque, per l'intermediario della simbologia letterale, una corrispondenza naturale tra le operazioni dell'algebra, che agiscono sui numeri, e le costruzioni della geometria, che si compiono a partire dai segmenti, in modo tale che ogni formula dell'algebra letterale può essere interpretata a seconda dei casi sia numericamente che in*

termini geometrici. È su questa lettura geometrica delle formule algebriche che Descartes pone le basi della sua Géométrie" Giusti

Già Bombelli aveva aperto questa strada. Cartesio nega di essere stato influenzato dall'opera di Viete e se gli era nota l'*Algebra* di Bombelli non ne poteva conoscere la parte geometrica che non era stata pubblicata. Evidentemente i tempi erano comunque maturi per la rivoluzione operata in campo matematico dalla *Géométrie* di Cartesio e che può anche apparire come il logico sviluppo degli scritti di Bombelli e di Viete.

GALILEO GALILEI: ASSI DI RIFERIMENTO

Nella giornata terza dei "***Discorsi intorno a due nuove scienze***" (1638) Galileo vuol dimostrare che lo spazio percorso con moto uniformemente accelerato in un certo periodo di tempo è uguale allo spazio percorso con moto uniforme nello stesso tempo con velocità costante uguale alla metà di quella massima raggiunta dal primo. Per fare ciò traccia un grafico in cui considera due assi perpendicolari e riporta su quello orizzontale le velocità, su quello verticale i tempi.



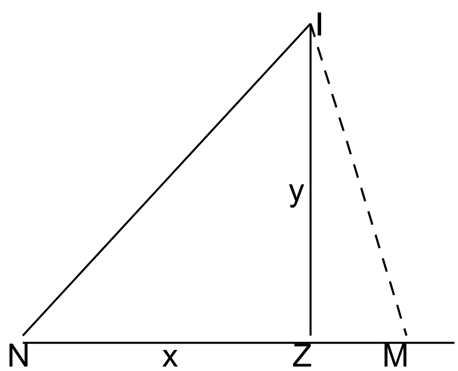
La somma delle velocità istante per istante, è uguale nelle due situazioni (riferimento implicito alle aree)

Già nel "***Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo***" (1632) Galileo si era servito di un analogo riferimento per rappresentare il moto uniformemente accelerato.

Dal mondo fisico vengono esplicite indicazioni sull'uso di assi di riferimento per esprimere problemi specifici.
Il riferimento è comunque relativo esclusivamente ad una rappresentazione grafica, non c'è alcuna intenzione di utilizzare enti algebrici. Del reso Galileo anche per esprimere le leggi della fisica non ricorre mai all'uso di formule.
Ma ciò che accomuna Galileo e Cartesio è che, come scrive Kline, nel XVII secolo "*rivoluzionarono la stessa natura dell'attività scientifica. Essi scelsero i concetti che la scienza avrebbe dovuto usare, ridefinirono gli obiettivi dell'attività scientifica e modificarono profondamente la metodologia della scienza*".

PIERRE DE FERMAT (1601 – 1665)

Magistrato e consigliere della corte di Tolosa, matematico per passione nel tempo libero, nel 1637 scrive una memoria "*Introduzione ai luoghi piani e solidi* " che sarà pubblicata dopo la sua morte. In questo scritto Fermat, studiando Apollonio e Viete, arriva ad affermare che "*Ogni volta che in una equazione finale si hanno due quantità incognite, si ha un luogo*" poiché l'estremità di un segmento che ha come misura il valore di una delle variabili e che si sposta in funzione del valore dell'altra, descrive una retta oppure una curva. Precisa: "*Per stabilire le equazioni, è comodo prendere le due quantità incognite sotto un angolo dato, angolo che abitualmente supporremo retto, fissare la posizione e l'estremità di una di esse* [origine]."
Riportiamo un esempio. Scrive Fermat (sono usate le notazioni moderne):
"Sia NZM una retta di cui è data la posizione e sulla quale è stato fissato il punto N. Si ponga NZ uguale alla quantità incognita x, e la retta ZI (condotta perpendicolarmente alla NZ per I) uguale all'altra quantità incognita y. Sia $dx=by$
Allora il punto I sarà su una retta, la cui posizione è nota."



d e b sono due valori assegnati, N è l'origine, NM è il nostro asse delle ascisse, ZI una parallela alla direzione assegnata per le ordinate, x e y sono quindi le coordinate di I. Notiamo che gli assi di riferimento sono perpendicolari tra loro.
Fermat, come farà anche Cartesio, non usa coordinate negative [opera cioè nel primo quadrante]; forse una maggiore attenzione all'opera di Bombelli li avrebbe potuti aiutare a superare questa strana forma di "allergia".

Fermat esprime problemi geometrici in forma algebrica in modo che l'algebra possa venire in soccorso della geometria.
Come vedremo Cartesio non si limita a questo, egli vuole che la sua geometria costituisca anche un metodo capace di interessare e analizzare i diversi settori della matematica, e più in generale della conoscenza.

RENÈ DESCARTES (1596 – 1650): *cogito ergo sum*

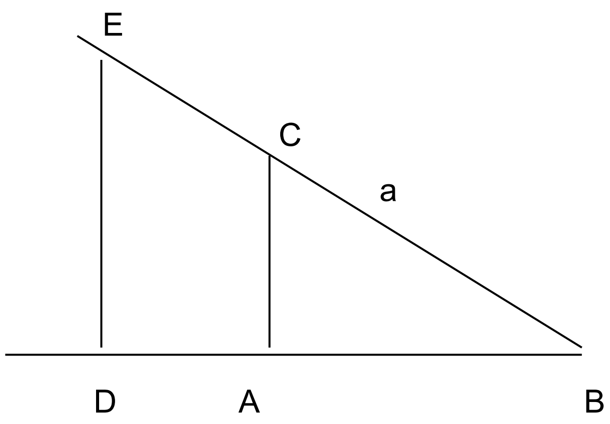
Il *Discorso sul metodo* di Cartesio esce nel 1637 come introduzione ai tre saggi *Diottrica*, *Meteore*, *Geometria*. Vi vengono proposte regole fondamentali per compiere indagini scientifiche.
Il *Discorso* inizia con una critica all'istruzione ricevuta presso scuole di alta reputazione di cui condanna il carattere prevalentemente umanistico - letterario basato "*più sull'esercizio della fantasia e sullo studio delle grandi opere altrui, che non sulla ricerca diretta, razionalmente sviluppata*" e il distacco del sapere dalle applicazioni pratiche a cui Cartesio è invece interessato, fatto questo che lo avvicina a Galileo.
Il suo pensiero filosofico – scientifico si focalizza sui diritti della ragione e su una concezione concreta dell'operare umano. Una sorta di umanizzazione della scienza attraverso la razionalità e la attività.
Dagli studi svolti nei vari campi della conoscenza Cartesio arrivò a concludere che i metodo della matematica era quello da seguire per stabilire le verità in tutti i campi perché permetteva di conseguire e dimostrare certezze ed era applicabile anche al di fuori della stessa matematica (un altro punto che avvicina Cartesio a Galileo). Nelle *Meditazioni metafisiche*, espone "*Ragioni che provano l'esistenza di Dio*" e lo fa proponendo:

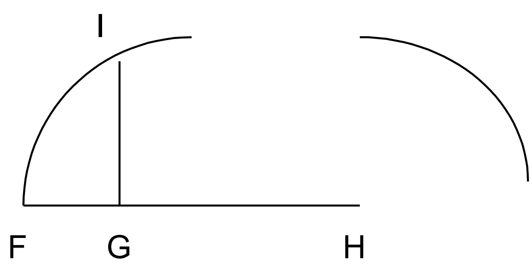
definizioni (10), postulati (7), assiomi e nozioni comuni (10), proposizioni (4 con corollario per la terza).
Ma nel pensiero cartesiano un posto centrale è occupato dal dubbio che investe i dati dei sensi e tutta la conoscenza comprese le affermazioni dimostrate dalla matematica. Dubitare significa pensare e pensare significa essere: "*Cogito ergo sum*", questa è verità assoluta e diventa il centro, il postulato, della filosofia cartesiana.
La *Geometria* di Cartesio non ha una struttura assiomatica, non ci sono definizioni, assiomi, teoremi c'è una "*libera manipolazione dell'algebra letterale*" (Giusti).
Cartesio, come Galileo, ripudia la tradizione e compie un radicale rinnovamento scientifico. Egli critica la geometria dei greci perché troppo astratta e legata alle figure e critica l'algebra perché soggetta a regole e formule. Decide perciò di prendere quanto di meglio c'è in ciascuna di esse e di correggere i difetti dell'una con l'aiuto dell'altra.

LA GEOMETRIA (1638)

Libro primo: segmento unità

Nel libro primo di questa sua opera Cartesio mostra le possibilità di trasformare problemi geometrici in problemi algebrici, inizia dalle operazioni aritmetiche e opera introducendo il segmento unitario: "…*data una linea che, per rapportarla nel miglior modo possibile ai numeri chiamerò l'unità e che, in genere, può essere presa a piacere*".
I procedimenti proposti si basano sulle uguaglianze di rapporti tra grandezze e il segmento unitario è riferito indistintamente a lunghezze, superfici, volumi.
Per la moltiplicazione, la divisione, l'estrazione di radice quadrata, i metodi esposti sono gli stessi già usati da Bombelli.





AB unità
BC = BE/BD BE=BD×BC

FG unità
GI radice quadrata di GH

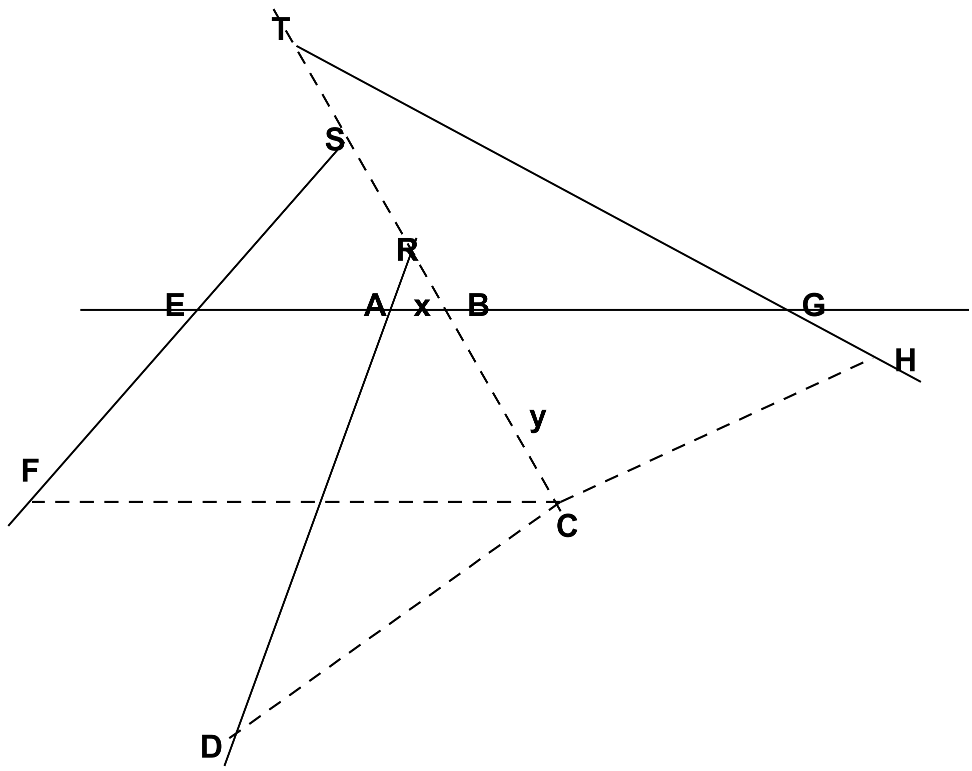
Cartesio estende il segmento unitario a qualunque dimensione e ciò lo avvicina a Bombelli mentre indica un notevole distacco relativamente a Viete.
Scrive Cartesio: "*Spesso non è però necessario tracciare in tal modo queste linee sulla carta, ma basta designarle con lettere, una per ciascuna di esse.*" Propone quindi di indicare i segmenti con le lettere dell'alfabeto e aggiunge: "*A questo proposito debbo notare che con* a^2 *o* b^3 *o espressioni simili intendo in genere soltanto line assolutamente semplici, anche se le chiamo, per servirmi dei termini dell'algebra, quadrati, cubi, ecc.*"

Libro primo: la messa in equazione

Cartesio spiega dettagliatamente "*Come pervenire alle equazioni che servono a risolvere i problemi*" . Scrive: "*volendo risolvere qualche problema, si deve fin dal principio considerarlo come già risolto, e assegnare una lettera ad ogni linea che si ritiene necessaria per costruirlo, sia a quelle che non son note, che alle altre. […] fino a che non si sia riusciti a trovare il procedimento per esprimere una stessa quantità in due modi, cioè non si sia pervenuti a ciò che si chiama Equazione.*"
Se l'equazione ha una sola incognita la sua soluzione è la risposta al problema. Se ha due incognite, le soluzioni sono i punti di una curva ad ognuno dei quali corrisponde una coppia di valori x,y. Dice Cartesio dobbiamo riconoscere e tracciare questa curva ed è lei la soluzione del problema. Se l'equazione è di primo o secondo grado la curva può essere tracciata usando soltanto rette e cerchi.

Libro primo: il problema di Pappo, assi obliqui

Il problema di Pappo per quattro rette: date quattro rette trovare il luogo geometrico dei punti C per i quali tracciare quattro segmenti che tocchino le rette date nei punti B, D, F, H formando angoli CBA, CDA, CFE, CHG assegnati, in modo che sia:
$CB \times CD = k \times CF \times CH$



Cartesio risolve il problema riferendo ciascuno dei segmenti interessati a due di essi, AB che indica con x ed è fisso in A e l'altro, B variabile lungo una ratta data, e CB, che indica con y e si sposta rimanendo parallelo a se stesso.

"*per liberarmi di tutte queste linee, considero una delle rette date e una di quelle che bisogna trovare, per esempio AB e CB, come le principali, e a queste cerco così di riferire tutte le altre*"

A origine - retta AB e direzione BC assi di riferimento

Primo uso da parte di Cartesio di quelle che saranno dette coordinate cartesiane e che in questo caso non sono perpendicolari tra loro.

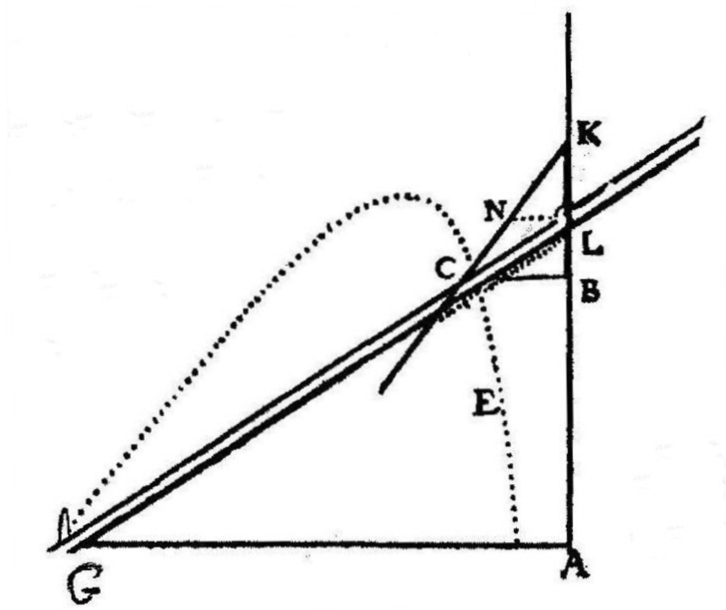
Noti gli angoli e le posizioni reciproche delle quattro rette Cartesio può esprimere ciascuno dei segmenti CB, CD, CF,CH, con un polinomio di primo grado in x e y, quindi il risultato è una equazione di secondo grado e il luogo è una conica.

Libro secondo: curva – equazione

"*Per tracciare tutte le curve che qui pretendo introdurre, è sufficiente supporre solo questo, che due o più linee possano muoversi l'una ad opera dell'altra, e che le loro intersezione determinino altre curve*"

Le curve considerate da Cartesio sono quelle esprimibili attraverso equazioni algebriche e ne effettua la costruzione per punti utilizzando strumenti meccanici.
Successivamente rileva che: "..*tutti i punti di quelle curve che possiamo chiamare Geometriche (rispondenti cioè a misure precise ed esatte) stanno necessariamente con tutti i punti di una retta in una certa relazione che può essere espressa per tutti i punti per mezzo di una singola equazione.*"
Dallo strumento alla curva, dalla curva all'equazione, ma anche dal risultato algebrico alla costruzione geometrica: connubio paritetico, soccorso reciproco tra algebra e geometria.
Con Cartesio la geometria diventa **geometria delle curve**, sono le curve le soluzioni dei problemi e la loro espressione algebrica, che è la relazione fondamentale che ne caratterizza tutti i punti, permetterà di analizzarle ed individuare altre proprietà.
Scrive Giusti: "*Queste tre caratteristiche – strumenti di indagine, oggetti di studio, soluzioni di problemi – determinano un nuovo oggetto, la **curva-equazione**, il quale prende semplicemente il nome e il posto di quello classico, che ne risulta così completamente trasformato*"

Libro secondo: assi perpendicolari



Cartesio vuole conoscere il genere a cui appartiene la linea EC i cui punti sono individuati come intersezioni del "*regolo GL e della figura piana CNKL, il cui lato KN è prolungato indefinitamente verso C*". GL ruota intorno a G. Sono noti: AG = a, LK = b, NL = c

Sceglie la retta AB a cui riferire i punti della curva e il punto A come origine. Sia C un punto a piacere sulla curva, traccia CB//GA e pone AB = x e CB = y , variabili.

NL:LK=CB:BK → c:b=y: (b+BL) → BL = $y \cdot b/c - b$

Tenendo conto di questo risultato da CB:LB=GA:LA ricava l'equazione:

$y^2 = cy - c/b\, xy + ay - ac$

È una equazione di secondo grado, quindi il luogo descritto è una conica.

Mentre nel problema di Pappo Cartesio utilizza assi di riferimento obliqui tra loro, qui sceglie assi perpendicolari.

Cartesio e i numeri negativi

Nel libro terzo, dedicato alla teoria delle equazioni, a proposito della natura di queste Cartesio scrive che esse sono: "*Somme costituite di parecchi termini, parte noti e parte incogniti, dei quali alcuni sono uguali ai rimanenti o, piuttosto, considerati tutti insieme, sono uguali a zero; spesso, infatti, sarà meglio considerarli in quest'ultimo modo."*

Vengono così presi in considerazione i coefficienti negativi.

Cartesio riconosce che una equazione ammette tante radici quante sono le "dimensioni" dell'incognita. Questo lo porta ad accettare anche le radici negative, che chiama *false,*:nel caso che x indichi "*il difetto di una quantità*": "*Spesso accade tuttavia che alcune di queste radici siano false (o inferiori a 0*)", e aggiunge: "*tanto le radici vere quanto le false non son sempre reali, ma talvolta soltanto immaginarie […] non v'è nessuna quantità che corrisponde a quelle che immaginiamo*".

Considerazioni conclusive

Non è più la geometria che giustifica l'algebra, ma è l'algebra che permette di indagare i più svariati problemi geometrici con una trattazione uniforme e ciò attraverso l'uso sistematico degli assi di riferimento che permette di rappresentare i punti con coppie di numeri e di tradurre problemi geometrici in relazioni algebriche.

Si osserva però che da Cartesio gli assi non sono dati a priori, ma sono scelti in funzione del singolo problema trattato e che non sono prese in considerazione coordinate negative.

Inoltre Cartesio, come Fermat e Apollonio, in realtà non considera due assi, ma un semiasse e un insieme di segmenti che partono dai punti del semiasse e dei quali è assegnata la direzione.

Nel 1748 Eulero nella *Introduction in Analysin Infinitorum* considera assi coordinati, non dipendenti dal particolare problema trattato, a cui si riferiscono tutti i punti del piano alle coordinate dei quali dà il segno. In tal modo "*la nozione di coordinata è posta a fondamento di una esposizione sistematica della Geometria analitica*"

Lagrange scriverà: "*Fino a quando l'algebra e la geometria avanzarono su sentieri separati il loro progresso fu lento e le loro applicazioni limitate. Ma quando queste due scienze unirono le loro forze, esse trassero l'una dall'altra fresca vitalità e da allora in poi marciarono a rapidi passi verso la perfezione*"

Osservazioni

Nel libro primo,dopo avere dato le linee generali per la messa in equazione di un problema, Cartesio scrive:
"*Non mi fermerò tuttavia a spiegare ciò più dettagliatamente, perché così facendo vi priverei del piacere d'apprendere da soli, e dell'utilità di coltivare il vostro ingegno, esercitandolo in tali ricerche; e questo, a mio avviso, è il più grande beneficio che si possa trarre da questa scienza."*
Questo principio è ripreso nella frase posta a chiusura dell'opera:
" *E spero che i posteri, mi saranno grati, non solo per quel che ho qui spiegato, ma anche per tutto ciò che ho omesso intenzionalmente al fine di lasciar loro il piacere della scoperta*"
Mi sembra significativo avvicinare queste affermazioni a ciò che scriverà tre secoli dopo **Federigo Enriques** nel suo articolo *Insegnamento dinamico* (Periodico di Matematiche 1921) :
"[l'insegnamento è] *un aiuto a chi voglia imparare da sé e però sia disposto, anziché a ricevere passivamente, a conquistare il sapere, come una scoperta o un prodotto del proprio spirito.*"
Nello stesso articolo parla anche della "*messa in equazione*" di un problema e dell'importanza di condurre l'allievo a "*comprendere che cos' è l'equazione di un problema*" , tenendo presente che "*comprendere significa divenir atti ad applicare*: *e tale attitudine si svolge solo come frutto di un lavoro attivo* "
Queste considerazioni possono essere assunte come indicazioni didattiche di particolare interesse.

BIBLIOGRAFIA

R. Bombelli – **L'algebra** – Opera di Rafael Bombelli da Bologna – prima edizione integrale, Prefazione di E. Bortolotti e U. Forti – Feltrinelli, Milano 1966

E. Bortolotti – **Lezioni di geometria analitica**, Vol.I – Ed. Zanichelli 1923

Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli – **Fonti per la storia della matematica** – Sansoni, Firenze 1992

C. Boyer – **Storia della matematica** – A. Mondadori 2001

F. Brunetti, a cura di –**Opere di Galileo Galilei**, Vol. II – UTET, Torino 1964

N. Bourbaki – **Elementi di storia della matematica** – Feltrinelli, Milano 1963

L. Geymonat – **Storia del pensiero filosofico e scientifico**, Vol. II – Garzanti, Milano 1970

E. Giusti – **Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici** – Bollati Boringhieri, Torino 1999

E. Giusti – **La *géométrie* di Descartes tra numeri e grandezze** – Su: Giornale critico della filosofia italiana, Settembre - Dicembre 1987

M. Kline – **Storia del pensiero matematico** , Vol. I – Einaudi, Torino 1991

E. Lojacono, a cura di – **Opere scientifiche di René Descartes**, Vol. II –UTET, Torino 1983

G. Loria – **Storia delle Matematiche** – Hoepli, Milano 1950

S. Maracchia – **Storia dell'algebra** – Liguori editore, Napoli 2005

P. Serini, a cura di – **Renato Descartes, Meditazioni metafisiche ed estratti dalle Obbiezioni e Risposte** – A. Mondadori, Milano 1929