La Matematica per scegliere... l'altra metà

Intervento a Mathesis Firenze del 10 marzo 2010

di Luigi Vannucci

1 La matematica applicata alle cose animate

Sono un matematico contaminato, che utilizza la matematica per analizzare problematiche che sorgono nell'ambito di realtà empiriche, un matematico applicato come si usa dire.

Avendo lavorato e lavorando principalmente in facoltà di economia, con "qualche" supplenza di calcolo delle probabilità anche in facoltà di scienze, mi occupo da una vita (per inciso sono nel mio quarantesimo anno di docenza universitaria) di come la matematica possa essere impiegata per descrivere e per agire efficacemente nella realtà di cui si occupano i politici, i sociologi, gli economisti, gli aziendalisti, i tecnici delle banche, delle istituzioni finanziarie, delle aziende assicurative, dei fondi di previdenza, dei giochi di sorte pubblici e privati...

Scorrendo l'elenco delle mie pubblicazioni e il mio curriculum, i miei interessi di ricerca oscillano tra l'ideazione di modelli per le scelte socio-economiche e quelle finanziarie-assicurative, la risoluzione di problemi sfiziosi, la messa a punto di strumenti statistici inferenziali. Un matematico applicato deve conoscere la statistica inferenziale, poiché oltre a ideare i modelli per rappresentare la realtà deve saperli calibrare e adattare alla luce delle osservazioni empiriche registrate.

Nel 1997 fui invitato dal prof. Giovanni Prodi a tenere una conferenza al XIV Convegno sulla didattica della matematica promosso dal Gruppo di Formazione Matematica della Toscana e la conferenza si titolava, con il gusto del paradosso, *La matematica per le cose animate*. Credo che questo titolo renda in estrema sintesi quello che è il mio normale operare: facendo appello alla matematica che conosco, e non se ne conosce mai abbastanza..., **trascrivo in termini matematici la realtà che mi si (nel si ci sto anch'io) propone di volta in volta, pervenendo a un modello che non sia in contrasto con i dati rilevati e, finita la fase descrittiva, passo poi a quella normativa tenuto**

conto che, di solito, ci sono interessi soggettivi in gioco più o meno diversificati.

Da matematici, **la fase normativa consiste in un certo numero di applicazioni** del tipo, limitandosi al caso di un numero finito di soggetti,

$G_i(s_1, ..., s_n, \theta)$ per $i = 1, 2, ..., n$

dove

n è il numero di soggetti diversamente coinvolti: se $n = 1$ il soggetto sceglie **decidendo** (presenza di un solo interesse soggettivo, di cui si occupa la **teoria delle decisioni**), se $n > 1$ i soggetti scelgono **considerando le strategie** a loro disposizione (presenza di interessi soggettivi diversificati, di cui si occupa la **teoria dei giochi**)

s_i è la scelta dell'i-mo soggetto appartenente al suo insieme di scelte S_i

θ è la scelta del Caso che sceglie nel suo insieme di scelta Θ: se Θ ha un solo elemento il modello è **deterministico** e se più di uno il modello è **stocastico**

$G_i(s_1, ..., s_n, \theta)$ rappresenta gli effetti sul soggetto i-mo delle scelte operate dai soggetti e dal caso: può essere un guadagno (deterministico o aleatorio, in questo secondo caso prefigurando una cascata di sorgenti di incertezza), una coppia di m-ple (una di importi e una di scadenze come si assume in matematica finanziaria), un insieme di beni, una probabilità di un evento...

Rammento soltanto che con $n > 1$ nel caso **deterministico e non cooperativo**, cioè quando i giocatori non usano strategie concordate, i **punti (o gli equilibri) di Nash** svolgono un ruolo basilare nella teoria.

Se $g_i(s_1, ..., s_n)$ rappresenta il guadagno (scalare) del giocatore i-mo allora un punto $(s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ è un equilibrio di Nash se per ogni $i = 1, 2, ..., n$ è

$g_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*) \geq g_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_i, ..., s_n^*)$ qualunque sia $s_i \in S_i$

ovvero se nessuno ha convenienza a spostarsi dal punto.

Sempre con $n > 1$ nel caso **deterministico e cooperativo** un ruolo fondamentale è svolto dal concetto di **ottimo paretiano**. Se $g_i(s_1, ..., s_n)$ rappresenta il guadagno (scalare) del giocatore i-mo allora un punto $(s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ è un ottimo di Pareto se non esiste un altro punto $(s_1, s_2, ..., s_n) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ tale che per ogni $i = 1, 2, ..., n$ sia

$g_i(s_1, s_2, ..., s_n) \geq g_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$

con la stretta disuguaglianza per almeno un indice, ovvero se non è possibile fare sì che nessuno peggiori e che almeno uno abbia un incremento positivo di guadagno. La **negoziazione di soluzioni** ha ovviamente senso solo all'interno dell'insieme degli ottimi di Pareto e potrebbe scaturire dalla ricerca di soluzioni massimizzanti funzioni-obiettivo, come

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(s_1, s_2, ..., s_n)$$

detta, in economia, **bene totale** o, se i guadagni possibili sono tutti non negativi, come

$$\prod_{i=1}^{n} g_i\left(s_1, s_2, ..., s_n\right)$$

detta **bene comune.**

Quasi sempre per semplificare **un modello stocastico nella teoria dei giochi ci si riconduce al modello deterministico, considerando i valori attesi dei guadagni scalari aleatori o una loro trasformazione nella dimensione dell'utilità**.

Scopo principale di questo incontro è quello di illustrare, dall'interno di un unico e particolare schematico contesto noto come **il problema della segretaria**, il ruolo giocato dal matematico nell'individuare le scelte più efficaci. È questo **uno degli esempi che propongo spesso in incontri con gli studenti di scuole medie superiori,** nel tentativo di orientare i giovani **quando debbono fare le loro scelte decisive sia professionalmente che, magari qualche anno dopo, per la vita familiare, ridenominando il problema come quello della ricerca della fidanzata/o**.

In questo incontro con gli amici della Mathesis di Firenze **non mi limiterò alla versione più classica** del problema come faccio nei suddetti incontri ma, per **sottolineare il valore dei diversi modi di acquisire informazioni e il cambiamento dell'obiettivo**, ne considererò due versioni aggiuntive, riallacciandomi a problematiche svolte qui alla Mathesis Firenze questo anno dal collega Aljosa Volcic.

Per una versione del problema, quando la regola ottima di scelta è troppo complicata, considererò anche la **convenienza nel limitarsi a soluzioni subottime ma con regole di scelta più semplici**.

Concluderò infine presentando **una delle versioni competitive del modello** e illustrerò, per il gioco che viene così a configurarsi, come si determinano i comportamenti razionali sia nel caso non cooperativo che nel caso cooperativo.

2 Il ruolo della matematica pura

Di solito in questi incontri con i giovani parto da qualche problema di matematica pura e cerco di far passare il concetto che la **matematica pura sia la ginnastica di base per preparasi allo svolgimento di qualunque altra specifica attività scientifica**. Faccio anche osservare che nella matematica pura, magari inconsapevolmente, si riesce a scoprire/inventare modelli che si rivelano, non di rado, di notevole utilità applicativa. In estrema sintesi dico che **il lavoro del matematico puro consiste nel definire una realtà convenzionale e nel divertirsi poi a dimostrare che talune, con eufemismo, non banali implicazioni sono vere**: il matematico puro può lavorare con le finestre chiuse al mondo, mentre il matematico applicato si lascia provocare e contaminare dal mondo esterno, che lo spinge alla ricerca di modelli e metodi per agire efficacemente nel contesto che di volta in volta si propone.

Per esemplificare il ruolo e la bellezza della matematica senza fini operativi, con i ragazzi **spesso ricorro a problemi formulabili nell'ambito dei**

numeri naturali e/o interi e se l'uditorio regge posso arrivare a qualche tosto problema da olimpiadi. Ho trovato divertente **uno dei problemi delle Olimpiadi di Matematica di Madrid del 2008**: mi sono divertito a risolverlo e di seguito racconto come (nella conferenza penso che salterò questa parte per non togliere tempo alla trattazione del tema su cui è incentrato l'incontro).

Dimostrare che esistono infiniti n naturali tali che p primo divide n^2+1 e $p > 2n+\sqrt{2n}$.

Un po' di conti su ciò che accade per i primi valori di n può accendere la curiosità dei ragazzi. Ecco le risultanze per $n \leq 30$, dove con $*$ si indicano i casi verificanti la condizione $p > 2n+\sqrt{2n}$.

$1^2+1=$	2	$6^2+1=$	^{*37}
$2^2+1=$	5	$7^2+1=$	2×5^2
$3^2+1=$	2×5	$8^2+1=$	5×13
$4^2+1=$	^{*17}	$9^2+1=$	$^*2\times 41$
$5^2+1=$	2×13	$10^2+1=$	^{*101}
$11^2+1=$	$^*2\times 61$	$16^2+1=$	^{*257}
$12^2+1=$	$^*5\times 29$	$17^2+1=$	$2\times 5\times 29$
$13^2+1=$	$2\times 5\times 17$	$18^2+1=$	$5^2\times 13$
$14^2+1=$	^{*197}	$19^2+1=$	$^*2\times 181$
$15^2+1=$	$^*2\times 113$	$20^2+1=$	^{*401}
$21^2+1=$	$2\times 13\times 17$	$26^2+1=$	^{*677}
$22^2+1=$	$^*5\times 97$	$27^2+1=$	$^*2\times 5\times 73$
$23^2+1=$	$^*2\times 5\times 53$	$28^2+1=$	$^*5\times 157$
$24^2+1=$	^{*577}	$29^2+1=$	$^*2\times 421$
$25^2+1=$	$^*2\times 313$	$30^2+1=$	17×53

Sono 10 i numeri primi del tipo n^2+1 tra i primi 30 casi. In 19 casi la condizione considerata nel quesito è soddisfatta.

I fattori primi coinvolti nella scomposizione di n^2+1 per $n \leq 30$ sono: 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 97, 101, 113, 157, 181, 197, 257, 313, 421, 577, 677; i primi dispari sono tutti congrui 1 modulo 4 e si potrebbe dimostrare che questo è vero per tutti i casi...

I valori di n che rispettano la condizione del quesito devono verificare $n^2+1 > 2n+\sqrt{2n}$ ovvero $n \geq 3$.

Se esistessero infiniti numeri primi rappresentati da n^2+1 la questione sarebbe risolta, ma questa risposta non si è in grado di darla (o mi sbaglio ?).

È ovvio che **i numeri non primi di tipo n^2+1 sono infiniti.** Per esempio quando n è dispari tali numeri sono pari e sono quindi divisibili per 2, quando n è pari e ha 2 o 8 come cifra delle unità n^2+1 è sempre divisibile per 5.

I numeri di tipo n^2+1 necessitano di infiniti numeri primi per la loro scomposizione in fattori primi: se fossero in numero finito i primi coinvolti nelle scomposizioni (in ordine crescente $2 < p_2 < ... < p_s$) allora la considerazione degli infiniti casi costruibili di tipo $\left((2p_2...p_s)^h\right)^2+1$ per $h = 1, 2, ...$ ci farebbe subito cadere in contraddizione.

Da notare altresì che **ci sono infiniti casi di tipo n^2+1 in cui il quesito ha risposta negativa**. Infatti dalla

$$\left(m^2+1\right)\left(n^2+1\right) = (mn+1)^2 + (m-n)^2$$

per $m = n+1$ si ha

$$\left((n+1)^2+1\right)\left(n^2+1\right) = (n(n+1)+1)^2 + 1$$

e un qualunque primo p divisore di $(n(n+1)+1)^2+1$ soddisfa $p \leq (n+1)^2+1$: segue che non è verificata per alcun n la condizione posta nel quesito, essendo per ogni n naturale impossibile che

$$(n+1)^2+1 > 2(n(n+1)+1) + \sqrt{2(n(n+1)+1)}$$

Con quanto osservato si può allora considerare che vale intanto la seguente affermazione: **esistono infiniti numeri primi p che dividono numeri della forma n^2+1 e per ognuno di tali primi esiste un numero naturale m tale che p divide m^2+1 e $p > 2m$.**

Prendiamo uno degli infiniti primi dispari p necessari per scomporre almeno un numero del tipo n^2+1.

Se n è tale che $2n < p \leq n^2+1$ per quel primo disporremo già del numero naturale desiderato.

Se $p \leq 2n$, notando che p divide anche $(n-hp)^2+1$ qualunque sia h intero, si consideri quell'unico valore h_* tale che $n - h_* p \in \left\{-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-1}{2}+1, ..., \frac{p-1}{2}\right\}$ e si ponga poi $m = |n-hp|$. Ovviamente p divide m^2+1 (esiste un intero positivo s tale che $sp = m^2+1$), inoltre $0 < m \leq \frac{p-1}{2}$ e da questa disuguaglianza segue che $p \geq 2m+1$ ovvero $p > 2m$.

Come si fa a rafforzare la disuguaglianza $p > 2m$ per portarsi alla $p > 2m + \sqrt{2m}$ di cui al quesito? La risposta sta nello stabilire **per quale j intero positivo non possano esistere divisori di m^2+1 nell'insieme di interi $\{2m, 2m+1, ..., 2m+j\}$.**

Sia $2m+k$ il generico rappresentante di tali divisori con k intero non negativo. Dalla scomposizione

$$m^2+1 = (2m+k)\left(\frac{m}{2} - \frac{k}{4}\right) + \frac{k^2}{4} + 1$$

risulta che per gli interi non negativi k per i quali risulta $\frac{k^2}{4} + 1 < \frac{m}{2} - \frac{k}{4}$ il valore $2m+k$ non può essere un divisore di m^2+1 e in particolare non vi potrà essere un primo pari a quel valore; inoltre affinchè si resti nell'ambito degli interi occorre che $2m-k$ sia multiplo di 4. Si noti che se risultasse $\frac{k^2}{4}+1=\frac{m}{2}-\frac{k}{4}$ allora varrebbe $m^2+1=(2m+k+1)\left(\frac{m}{2}-\frac{k}{4}\right)$

La disuguaglianza $\frac{k^2}{4}+1<\frac{m}{2}-\frac{k}{4}$ va considerata nella variabile k intera (pari e non negativa), con parametro $m\in\left\{0,1,...,\frac{p-1}{2}\right\}$ e con m e k tali che $2m-k$ sia multiplo di 4.

- per $m=0,1,2$ la disequazione $\frac{k^2}{4}+1<\frac{m}{2}-\frac{k}{4}$ non ha soluzioni intere non negative per k (si era già visto come debba essere $m\geq 3$)
- per $m\geq 3$ la disequazione $\frac{k^2}{4}+1<\frac{m}{2}-\frac{k}{4}$ ha come soluzioni intere i k che appartengono all'intervallo aperto $\left(0,\frac{\sqrt{8m-15}-1}{2}\right)$

e pertanto **l'esistenza di divisori di m^2+1 maggiori di $2m$ può aversi solo se si prendono in considerazione interi del tipo $2m+j+1$ (si noti il $+1$) con**

$$j\geq\frac{\sqrt{8m-15}-1}{2}$$

ovvero se

$$2m+j+1\geq 2m+\frac{\sqrt{8m-15}+1}{2}$$

In particolare, essendo il primo p un divisore di m^2+1, deve essere $p\geq 2m+\frac{\sqrt{8m-15}+1}{2}$. Si è vicini a poter sostenere che $p>2m+\sqrt{2m}$. Si rifletta ora sulla differenza $\frac{\sqrt{8m-15}+1}{2}-\sqrt{2m}$. Essa ha un andamento monotono crescente per $m=2,3,...$ con annullamento in 8 e convergente a $\frac{1}{2}$ per $m\to+\infty$: per valori di $m<8$ è negativa e per valori >8 è positiva, si annulla per $m=8$. In sintesi la condizione del quesito è garantita se $\frac{\sqrt{8m-15}+1}{2}>\sqrt{2m}$ ovvero se $m>8$. Si osservi ora che al crescere dei primi p il valore di m, per il quale m^2+1 debba essere divisibile per p, è ben presto >8: ciò avviene sicuramente se $p>65$... anche se può avvenire per altri primi minori di 65.

Ma, si potrebbe osservare, il quesito richiede che ci siano infiniti n naturali tali che p primo divida n^2+1 e $p>2n+\sqrt{2n}$ e si è invece dimostrato che ci sono infiniti primi p tali che esiste per essi un naturale m tale che p divide m^2+1 e $p>2m+\sqrt{2m}$?! Ragionando per assurdo si vede che quanto si è dimostrato è sufficiente: se bastasse un numero finito di numeri m con la proprietà considerata nel quesito, l'insieme dei loro divisori primi sarebbe anch'esso finito in contrasto con il fatto che devono essere infiniti i primi per scomporre in fattori primi i naturali di tipo n^2+1.

Per illustrare ai ragazzi le conclusioni raggiunte potrebbe essere rilassante considerare con essi **alcuni esempi illustrativi**.

Si considerano numeri primi di tipo $p = 4h + 1$, i soli per i quali può esistere un $m \in [-2h, 2h]$ tale che $m^2 + 1 = k\,(4h + 1)$.

1) Sia $p = 29$ che divide ad esempio 17^2+1 ($17^2+1 = 2\times5\times29$) con $29 \leq 2{\cdot}17$. Il valore di m da considerare è pertanto $m = |17 - 1 \cdot 29| = 12 \leq \dfrac{29-1}{2}$: è infatti $12^2 + 1 = 29 \cdot 5$ ed essendo $m = 12 > 8$ con $p = 29$ il quesito trova una risposta positiva con il numero $12^2 + 1 = 145$.

2) Sia $p = 13$. Considerando che i candidati per i valori di m sono $0, 1, ..., 6$ (è $m = 5$ poiché $5^2 + 1 = 26 = 13 \cdot 2$), senz'altro < 8, per questo numero primo il quesito non trova risposta positiva.

3) Si noti che il primo $p = 73$ divide $757^2 + 1$ ed è $p < 757$ ($757^2 + 1 = 2 \times 5^2 \times 73 \times 157$). Per riportarsi nell'intervallo di interi $[-36, 36]$ si deve considerare $m = |757 - 10 \cdot 73| = 27$ e tale valore deve essere > 8 per consentire che $m^2 + 1$ sia divisibile per 73. Il quesito ha con questo numero primo risposta positiva.

3 Il problema della scelta dell'altra metà, detto anche...

E veniamo all'argomento di questa conferenza di Mathesis Firenze, ovvero al **problema della scelta dell'altra metà (il coniuge).** Il problema nella sua più classica forma fu introdotto da Flood nel 1949 e rilanciato da lui negli anni '50. Il problema ha richiamato negli anni '60 l'attenzione di numerosi combinatoristi-probabilisti come Moser (1956), Gardner (1960), Guttman (1960), Lindley (1961), Karlin (1962), Chow, Robbins (1961, 1963), Bissenger, Siegel (1963), Chow, Robbins, Moriguti, Samuels (1964), Gilbert, Mosteller (1966).

A partire dagli anni '70 il problema è stato riproposto e risolto in numerose varianti ed è a tuttoggi oggetto di attenzione e di estensioni. Le citazioni potrebbero essere decine e decine, ottenibili anche navigando **in Internet partendo da Secretary problem** con o senza altre specificazioni come, ad esempio, **competitive**...

Ferguson ha dedicato qualche attenzione anche alle più lontane origini del problema nel suo *Who solved the secretary problem?*, *Statistical Science*, vol. 4, pp. 282-296, 1989. Egli lo fa risalire al 1875 prendendo spunto da una nota di Moser, *On a problem of Cayley*, *Scripta Math.*, vol.22, pp 289-292, 1956 o addirittura a Keplero riferendosi alle biografie di Keplero scritte da Baumgart del 1951 e da Koestler del 1960.

Con riferimento a Keplero (1571-1630) traduco liberamente un passo da Ferguson.

"Quando J. Kepler perde la sua prima moglie per il colera nel 1611, si pone il problema della sua sostituzione con la stessa serietà e dedizione con cui aveva trovato che l'orbita di Marte è un'ellisse. Il primo matrimonio, non del tutto felice, era stato combinato per lui e... per questa seconda occasione voleva prendere da solo ogni decisione. In una lettera a un amico del 23 ottobre 1613, scritta dopo aver preso la sua decisione, egli racconta dettagliatamente come ha proceduto. Ha vagliato undici candidate per due anni considerando per ognuna virtù, trascorsi, dote, valutazioni di genitori, di amici... e, in sintesi, ha scelto la quinta."

Il problema è stato denominato in vari modi: è noto infatti come **problema della segretaria**, come **gioco del Googol**, come **problema della scelta del coniuge**, come **problema della dote**, ai ragazzi dico che è il **problema della scelta della fidanzata o del fidanzato,** come originariamente proposto da Flood: mi guardano un po' strani anche perché il termine fidanzato/a è piuttosto in disgrazia.

4 La versione classica del problema della dote

In questa sede, per meglio stilizzarlo dal punto di vista matematico, ambientiamolo in oriente e lo consideriamo nella versione del **problema della dote** delle figlie del sultano, che si presta in modo naturale agli ulteriori interessanti sviluppi, come hanno mostrato J.P. Gilbert e F. Mosteller nel loro bel lavoro *Recognizing the maximum of a sequence*, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 61, pp. 35-73, 1966.

Immaginiamo **un sultano con uno stuolo di n giovani figlie alle prese con la decisione che la più bella di queste vada maritata a un giovane pretendente solo se questo supera una specifica prova a cui partecipa dopo avere conferito una consistente posta incrementativa delle ricchezze del sultano. Per ognuna delle n giovani è fissata, prima della prova, una ricca dote: il valore della dote, diverso per ogni figlia e massima proprio per la figlia più bella, è scritto su un biglietto insieme al nome della figlia cui si riferisce e tutti gli n biglietti sono posti in un'urna per un'estrazione casuale senza reibussolamento.**

Il giorno della prova, senza la presenza delle n figlie, il pretendente sa che la dote massima è quella associata alla figlia più bella, è altresì informato del valore di n ma non del valore delle doti e, via via che le estrazioni si succedono, non vede il contenuto del biglietto estratto, ma è informato soltanto se il biglietto estratto presenta un valore record per la dote senza menzionare né il valore della dote né il nominativo della figlia, cioè è informato soltanto del fatto che è stato estratto un biglietto con il valore della dote maggiore rispetto a tutti quelli già estratti.

Quando è annunciato un record il pretendente può far interrompere le estrazioni sperando che quel biglietto sia quello "vincente", associato alla figlia più bella e con la massima dote, o far continuare le estrazioni, ma senza più potere tornare indietro sui record già annunciati: ovviamente se e solo se il pretendente arresta le estrazioni sul biglietto "vincente" supera la prova e può allora maritarsi con la figlia più bella e con la massima dote. In ogni altro caso niente è

dovuto al pretendente, la posta pagata resta nelle disponibilità del sultano e... si passa al pretendente successivo con le stesse regole di partecipazione.

Si osservi che **il primo estratto è sicuramente un record, esso è subito annuciato e si attende la mossa del pretendente** (e potrebbe essere l'unico record annunciato se il primo estratto è relativo alla figlia con la massima dote): se il pretendente si ferma su quella estrazione supera la prova se e solo se la figlia indicata su quel primo biglietto è proprio la più bella e con il valore della dote massimo. Se egli decide di proseguire nelle estrazioni, rinuncia definitivamente a quella opportunità e **si procede in modo analogo fino all'annuncio del successivo record**.

Come riuscire nell'intento di intercettare nella scelta proprio la figlia più bella e con la massima dote?

Mettendosi nelle vesti del giovane pretendente, dopo che ha pagato la posta di partecipazione, si tratta di **prendere quella decisione che massimizza la probabilità di scegliere la figlia più bella e con la dote massima** (l'applicazione G_1 è pertanto la probabilità di un evento)**.** Una prima constatazione: la regola che **solo quando è annunciato un record si può utilmente tentare** non danneggia i pretendenti ammessi alla prova, poiché l'interruzione delle estrazioni a quelle non record comporta una probabilità nulla dell'evento desiderato.

Qualche quesito sul numero aleatorio di record nell'estrazione casuale senza reimbussolamento di n numeri positivi diversi.

Qual è il numero medio di record al variare di n ?

Se indichiamo con X_n il numero aleatorio di record vale l'equazione ricorsiva, basata su classici risultati del calcolo delle probabilità,

$$X_n = \begin{cases} 1 + X_{n-1} & \text{con probabilità } \dfrac{1}{n} \\ X_{n-1} & \text{con probabilità } \dfrac{n-1}{n} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione ricorsiva sui valori attesi $r_n = E\left[X_n\right]$

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot (1 + r_{n-1}) + \frac{n-1}{n} \cdot r_{n-1}$$

Si rifletta che se con probabilità $\dfrac{1}{n}$ è estratto per primo il biglietto con il minimo valore di dote allora il numero medio di record è quello che si ha aggiungendo al primo record tutti quelli che si ottengono con i restanti $n-1$ valori, mentre se con probabilità $\dfrac{n-1}{n}$ è estratto un biglietto diverso da quello con il minimo valore di dote allora ai fini del conteggio del numero atteso di record è come se si avessero solo $n-1$ biglietti.

Quindi ricorsivamente per $n \geq 1$, tenuto conto che $r_1 = 1$,

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot (1 + r_{n-1}) + \frac{n-1}{n} \cdot r_{n-1} = r_{n-1} + \frac{1}{n} =$$
$$= r_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = ... = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Altro quesito meno semplice: Qual è **il momento secondo e la deviazione standard** del numero aleatorio di record al variare di n ?

Introducendo $s_n = E\left[X_n^2\right]$ si ha ricorsivamente

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot E\left[(X_{n-1}+1)^2\right] + \frac{n-1}{n} \cdot E\left[X_{n-1}^2\right] =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (1 + 2r_{n-1} + s_{n-1}) + \frac{n-1}{n} \cdot s_{n-1}$$

con risultato, tenuto conto che $s_1 = 1$ e del risultato precedente, per $n \geq 2$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2}{n} r_{n-1} + \frac{1}{n} = 1 + \sum_{h=2}^{n} \left(\frac{2}{h} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{h-1} \right) + \frac{1}{h} \right)$$

Se interessa poi la **deviazione standard** basta calcolare $\sqrt{s_n - r_n^2}$. Ecco una tabella dei primi valori di r_n e di $\sqrt{s_n - r_n^2}$ ottenuti calcolando al variare di $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h}$, $\sqrt{1 + \displaystyle\sum_{h=2}^{n} \left(\frac{2}{h} \left(\sum_{j=1}^{h-1} \frac{1}{j} \right) + \frac{1}{h} \right) - \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h} \right)^2}$

n	r_n	$\sqrt{s_n - r_n^2}$
1	1	0
2	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5$
3	$\frac{11}{6} = 1.8\overline{3}$	$\sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6} \simeq 0.687$
4	$\frac{25}{12} = 2.08\overline{3}$	$\sqrt{\frac{95}{144}} = \frac{\sqrt{95}}{12} \simeq 0.812$
5	$\frac{137}{60} = 2.28\overline{3}$	$\sqrt{\frac{2951}{3600}} = \frac{\sqrt{2951}}{60} \simeq 0.905$
6	$\frac{49}{20} = 2.45$	$\sqrt{\frac{3451}{3600}} = \frac{\sqrt{3451}}{60} \simeq 0.979$
7	$\frac{363}{140} = 2.59\overline{285714}$	$\sqrt{\frac{190\,699}{176\,400}} = \frac{\sqrt{190699}}{420} \simeq 1.039$
8	$\frac{761}{280} = 2.717\overline{857142}$	$\sqrt{\frac{839\,971}{705\,600}} = \frac{\sqrt{839\,971}}{840} \simeq 1.091$
9	$\frac{7129}{2520} = 2.828\overline{968253}$	$\sqrt{\frac{8186\,939}{6350\,400}} = \frac{\sqrt{8186\,939}}{2520} \simeq 1.135$

[Per inciso: saprebbero orientarsi i ragazzi sulla struttura di un numero razionale rappresentato con il criterio posizionale in base 10 nota la frazione ridotta ai minimi termi ?]

Con analogo ragionamento si può determinare anche **la distribuzione della variabile aleatoria** X_n: le sue possibili determinazioni, dato n, sono $1, 2, ..., n$ e i casi semplici sono $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$. In generale se si pone

$p_{h,n} = P(X_n = h)$
si possono determinare tali probabilità con l'equazione ricorsiva

$$p_{h,n} = \frac{1}{n} \cdot p_{h-1,n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot p_{h,n-1}$$

partendo dalle condizioni iniziali $p_{0,0} = 1$ e $p_{0,n} = p_{h,n} = 0$ se $h > n$ per $n = 1, 2...$

Qualche quesito di riscaldamento per avvicinarsi alla trattazione del problema della dote, facendo attenzione agli articoli un e il e alla presenza o meno dell'aggettivo ultimo.

1) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h, con $h = 1, 2, ..., n$? Risposta $\frac{1}{h}$.

2) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1, con $h_1 = 1, 2, ..., n-1$, e **un successivo annuncio di record** in h_2, con $h_2 = h_1+1, ..., n$? Risposta $\frac{1}{h_2 h_1}$.

3) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1, con $h_1 = 1, 2, ..., n-1$, e **il successivo annuncio di record** in h_2, con $h_2 = h_1 + 1, ..., n$? Risposta $\frac{1}{h_2 (h_2 - 1)}$.

4) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1, con $h_1 = 1, 2, ..., n-1$, e **il successivo e ultimo annuncio di record** in h_2, con $h_2 = h_1 + 1, ..., n$? Risposta $\frac{1}{n (h_2 - 1)}$.

5) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record in** h_1 **o prima** e **il successivo e ultimo annuncio di record** in h_2, con $h_2 = h_1 + 1, ..., n$? Risposta $\frac{h_1}{n (h_2 - 1)}$.

6) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1, **un successivo annuncio** in h_2, con $h_2 = h_1 + 1, ..., n-1$, e **un successivo annuncio** in h_3, con $h_3 = h_2 + 1, ..., n$? Risposta $\frac{1}{h_3 h_2 h_1}$.

7) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1, **un successivo annuncio** in h_2, con $h_2 = h_1+1, ..., n-1$, e **il successivo annuncio** in h_3, con $h_3 = h_2 + 1, ..., n$? Risposta $\frac{1}{h_3 (h_3 - 1) h_1}$

8) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1, **il primo successivo annuncio** in h_2, con $h_2 = h_1+1, ..., n-1$, e **il secondo successivo annuncio** in h_3, con $h_3 = h_2 + 1, ..., n$? Risposta $\frac{1}{h_3 (h_3 - 1)(h_2 - 1)}$.

9) Qual è la probabilità che vi sia **un annuncio di record** in h_1 **o prima**, **il primo successivo annuncio** in h_2, con $h_2 = h_1+1, ..., n-1$ e **il secondo successivo annuncio** in h_3, con $h_3 = h_2+1, ..., n$? Risposta $\frac{h_1}{h_3 (h_3 - 1)(h_2 - 1)}$.

Con questo addestramento ritorniamo dal giovane pretendente alle prese con la sfida di scegliere con lo scarno aiuto dei record la più bella figlia e con la massima dote.

Qual è il criterio di scelta vincente ? Ci si rende ben presto conto che il nodo della decisione consiste nel **fissare un valore intero non negativo** m**, tale che se un record è annunciato (troppo presto) in un turno** $h \leq m$ **il giovane decide di andare avanti, mentre se dopo le prime** m **estrazioni è annunciato un record (potrebbe anche non esserci più alcun record annunciato...) il giovane si ferma sulla relativa estrazione sperando di avere raggiunto il suo scopo.**

Non è complicato calcolare la probabilità dell'evento $E =$**"Il pretendente sceglie la figlia più bella del sultano e con la massima dote"** al variare di m mediante il **teorema delle probabilità totali** del calcolo delle probabilità. Con H_j intendiamo l'evento **"il biglietto relativo alla figlia più bella e con la massima dote è estratto al turno** j**"** per $j = 1, 2, ..., n$: tali eventi sono equiprobabili e costituiscono una partizione dell'evento certo (esaustivi e a due a due incompatibili). Vale pertanto per la probabilità dell'evento E in funzione di m, indicata con $P_m(E)$,

$$P_m(E) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(E \mid H_j)$$

Ma $P(H_j) = \dfrac{1}{n}$, $P(E \mid H_j) = 0$ se $j \leq m$ e $P(E \mid H_j) = \dfrac{m}{j-1}$ se $j > m$: condividete ? Su $P(H_j) = \dfrac{1}{n}$, $P(E \mid H_j) = 0$ se $j \leq m$ nessuno in genere fa obiezioni, ma su $P(E \mid H_j) = \dfrac{m}{j-1}$ se $j > m$ qualcuno può avere dubbi. **Si può giustificare con il seguente ragionamento**:

L'evento condizionante è che la figlia con la massima dote si presenti all'estrazione j-ma. Si consideri l'estrazione del biglietto con il valore di dote massimo estratto prima dell'estrazione j-ma (che non è relativo alla più bella figlia e con la massima dote, estratta al j-mo turno, e che è annuciato come record): quella estrazione fa aspettare vantaggiosamente il giovane pretendente fino alla estrazione j-ma se e solo se essa è tra la 1-ma e la m-ma estrazione (e non è invece tra la $(m+1)$-ma e la $(j-1)$-ma estrazione) e questo evento condizionato, stante l'ipotesi di estrazione casuale, ha appunto probabilità $\dfrac{m}{j-1}$. Si rivedano anche i quesiti di riscaldamento sopra considerati.

Segue immediatamente che

$$P_m(E) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(E \mid H_j) =$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{m}{j-1} =$$

$$= \frac{m}{n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} \right)$$

Questa probabilità vale per $m = 1, ..., n-1$. Per $m = 0$ va ovviamente posto $P_0(E) = \frac{1}{n}$: il giovane pretendente ferma subito le estrazioni al primo record e con probabilità $\frac{1}{n}$ potrebbe riuscire nella prova.

Analizzando la differenza $P_m(E) - P_{m-1}(E)$ si può determinare quale m massimizza $P_m(E)$

$$P_m(E) - P_{m-1}(E) =$$
$$= \frac{m}{n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{m-1}{n}\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} + ... + \frac{1}{n-1}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} - 1\right)\frac{1}{n}$$

da cui emerge che **la soluzione si ha per**

$$m_* = \max_{m \leq n-1}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} - 1 \geq 0\right)$$

La disuguaglianza se soddisfatta è sempre stretta per $n > 2$, per cui non ci possono essere due valori ottimi per m se $n > 2$. La seguente tabella da conto per alcuni n del valore di m_* e della probabilità corrispondente

n	m_*	$P_{m_*}(E)$
1	0	1
2	0 o 1	$\frac{1}{2}$
3	1	$\frac{1}{2}$
4	1	$\frac{11}{24} \simeq 0.4583$
5	2	$\frac{13}{30} \simeq 0.4333$
10	3	$\frac{3349}{8400} \simeq 0.3987$
50	18	$\simeq 0.3743$
100	37	$\simeq 0.3710$
1000	368	$\simeq 0.3682$
∞		$\frac{1}{e} \simeq 0.3679$

Si tenga conto per esempio per $n = 100$ che

$$\sum_{j=37}^{100-1}\frac{1}{j} \simeq 1.0030 \text{ e } \sum_{j=38}^{100-1}\frac{1}{j} \simeq 0.9758$$

Il caso asintotico, che illustra una delle tante curiose proprietà del numero e, "emerge" tenendo conto che per $1 < m < n$ è

$$\ln\frac{n}{m} < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} < \ln\frac{n-1}{m-1}$$

Da queste disuguaglianze che usano la funzione logaritmo naturale segue che

- per ogni n il valore di m_* è vicino da sopra o coincidente con la massima soluzione intera in m di $1 < \ln \dfrac{n}{m}$ ovvero $e < \dfrac{n}{m}$ ovvero $m < \dfrac{n}{e}$: per esempio se $n = 100$ è $\frac{100}{e} \simeq 36.79$ e $m_* = 37$, se $n = 1000$ è $\frac{1000}{e} \simeq 367.9$ e $m_* = 368$

- per ogni n il valore di m_* è vicino da sotto o coincidente con la minima soluzione intera in m di $1 < \ln \dfrac{n-1}{m-1}$ ovvero $e < \dfrac{n-1}{m-1}$ ovvero $m < 1 + \dfrac{n-1}{e}$: per esempio se $n = 100$ è $1 + \frac{99}{e} \simeq 37.42$ e $m_* = 37$, se $n = 1000$ è $1 + \frac{999}{e} \simeq 368.5$ e $m_* = 368$

Prendendo per ogni n l'approssimazione $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + ... + \dfrac{1}{n-1} \simeq \ln \dfrac{n - \frac{1}{2}}{m - \frac{1}{2}}$ ($\simeq$ è sempre in realtà $\leq$) si ha un'indicazione piuttosto precisa del valore ottimo di m considerando l'intero per difetto più vicino a $\frac{1}{2} + \dfrac{n - \frac{1}{2}}{e}$, ovvero $m_1 = \left\lfloor \frac{1}{2} + \dfrac{n - \frac{1}{2}}{e} \right\rfloor$. Alcuni casi sono illustrati nella seguente tabella

n	$\frac{1}{2} + \dfrac{n - \frac{1}{2}}{e}$	$m_1 = \left\lfloor \frac{1}{2} + \dfrac{n - \frac{1}{2}}{e} \right\rfloor$
1	0.684	0
2	1.052	1
3	1.420	1
4	1.788	1
5	2.155	2
10	3.995	3
50	18.71	18
100	37.10	37
1000	368.2	368

dove si vede che per essi il valore di m_1 proposto coincide con m_* (confronta con la precedente tabella). Un controllo per tutti gli $n = 1, 2, ..., 2000$ segnala che la non coincidenza di m_* e di m_1 si ha solo per $n = 1361$ con $m_* = 500$ e $m_1 = 501$ e per $n = 97$ con $m_* = 35$ e $m_1 = 36$. **Se si prendesse $m_2 = \left\lfloor 0.4995 + \dfrac{n - \frac{1}{2}}{e} \right\rfloor$ allora per tutti gli $n = 1, 2, ..., 2000$ il valore di m_2 proposto coinciderebbe con m_*.**

La ricetta preparata dal matematico per il decisore non poteva essere più sintetica ed efficace di così: noto n si calcola m_2 e poi si aspetta il primo record annunciato dopo la m_2-ma estrazione, garantendosi così una probabilità di successo che cresce da $\dfrac{1}{e}$ a $\dfrac{1}{2}$ quando n scende da livelli grandi a piacere a soltanto 2. Una probabilità incredibilmente alta e controintuitiva, in quanto ci si aspetterebbe che all'aumentare di n essa tendesse ad annullarsi e invece non scende sotto a $\frac{1}{e} \simeq 0.3679$ e... proprio questo fatto fa denominare la questione considerata anche come **il problema del 37%**, un modo in più di denotarlo.

La condizione di ottimalità per il parametro m prima individuata

$$m_* = \max_{m \leq n-1} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} - 1 \geq 0 \right)$$

ha un'interessante lettura alla luce della formula del numero atteso di record: **conviene aspettare fino alla estrazione dopo la quale è ancora maggiore di 1 o uguale a 1 il numero atteso di record.**

5 La seconda versione del problema della dote

Diverse sono le varianti apportate al problema finora considerato, noto come la versione classica del problema.

Una prima variante presuppone che

- i valori della dote siano fissati **sorteggiando un campione bernoulliano coerente con una data distribuzione di probabilità continua**, in modo che sia nulla la probabilità di due valori di dote uguali
- **il giovane pretendente sia subito informato, oltre che di n, della suddetta distribuzione di probabilità e, nel susseguirsi delle estrazioni, del valore della dote scritta sui biglietti estratti**

Il fine del pretendente è sempre quello di riuscire a fermare le estrazioni in corrispondenza alla dote di valore massimo tra gli n valori campionati, dote associata alla figlia più bella. Non è annunciato ovviamente alcun record, in quanto il pretendente è in grado di determinarseli da solo.

In questa variante si è essenzialmente considerato il caso in cui il campionamento bernoulliano delle doti sia stato fatto sulla distribuzione uniforme in $(0, 1)$: i valori scritti sugli n biglietti potrebbero essere proprio tali numeri, da moltiplicarsi poi per una costante opportuna.

Come si determina ora la decisione ottima del pretendente ? Ogni volta che un biglietto è estratto si è informati del valore sopra riportato e solo se si presenta un record occorre che il pretendente valuti se fermarsi o meno: **la scelta tra le due alternative deve tenere conto del valore record, sia $x \in (0, 1)$, e delle estrazioni ancora da effettuare, siano $r = 0, 1, ..., n-1$.**

Intuitivamente ci deve essere un valore x_r di indifferenza e, a seconda che x sia minore o maggiore di tale valore soglia, si dovrà rispettivamente andare avanti nelle estrazioni o fermarsi. Il valore soglia (o di indifferenza) si ottiene uguagliando la probabilità di vincere se si interrompono le estrazioni con quella di vincere se si continua, dovendo ancora effettuare r estrazioni.

Se $r = 0$ e x è record si vince con certezza (ciò accade con certezza se $n = 1$ vincendo con probabilità 1).

Se $r = 1$ e x è il record si deve ovviamente richiedere l'ultima estrazione se $x < \frac{1}{2}$, fermarsi se $x > \frac{1}{2}$, indifferenti se $x = \frac{1}{2}$ poichè è $1 - x$ la probabilità che la successiva e ultima estrazione sia il nuovo record: la soglia di indifferenza, $x_1 = \frac{1}{2}$, si determina con l'equazione $x = 1 - x$. Il risultato fa luce sul caso $n = 2$, per il quale si ha una probabilità di successo pari a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\, dx = \frac{3}{4}$$

che è largamente maggiore di $\frac{1}{2}$, la probabilità di vincere nello schema meno informativo.

Se $r = 2$ e x è il record si deve tenere conto che i due biglietti ancora nell'urna possono avere entrambi i valori minori di x, uno minore di x e uno maggiore di x, entrambi maggiori di x con probabilità rispettive x^2, $2x\,(1-x)$, $(1-x)^2$. Se si continuano le estrazioni la probabilità di vincere è (si applica il solito teorema delle probabilità totali)

$$(2x\,(1-x)) \cdot 1 + (1-x)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

La probabilità di vincere fermandosi è invece x^2. Il valore di indifferenza è pertanto la soluzione della equazione

$$x^2 = 2x\,(1-x) + (1-x)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

La soluzione dell'equazione, accettabile in questo contesto, è $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}+1}{5} \simeq 0.6899$ e pertanto se $x > \dfrac{\sqrt{6}+1}{5}$ ci si ferma se $x < \dfrac{\sqrt{6}+1}{5}$ si continua nelle estrazioni, se $x = \dfrac{\sqrt{6}+1}{5}$ si è indifferenti. Il risultato fa luce sul caso $n = 3$, per il quale si ha una probabilità di successo pari a (x rappresenta la generica determinazione del primo estratto e t quella del secondo che occorre confrontare con il valore soglia $x_1 = \frac{1}{2}$)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{x} (1-x)\ dt + \int_x^{\frac{1}{2}} (1-t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\, dt \right) dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}+1}{5}} \left(\int_0^{x} (1-x)\ dt + \int_x^{1} t\, dt \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{6}+1}{5}}^{1} x^2\, dx = \frac{\sqrt{24}}{25} + \frac{293}{600} \simeq 0.68429$$

che è ancora maggiore di $\frac{1}{2}$, la probabilità di vincere nello schema meno informativo.

In generale **per un qualsiasi** $r \geq 1$ la distribuzione di probabilità del numero aleatorio di biglietti con valori maggiori di x, che si può indicare con N_r, è

$P\left(N_r = h\right) = \binom{r}{h} x^{r-h} \left(1-x\right)^h$ con $h = 0, 1, ..., r$

e questo conduce a calcolare **la soglia di indifferenza**, x_r, con l'equazione (si tenga conto del solito teorema delle probabilità totali)

$$x^r = \sum_{h=1}^{r} \binom{r}{h} x^{r-h} \left(1-x\right)^h \cdot \tfrac{1}{h}$$

Per $r = 3$ è $x_3 \simeq 0.7758$. Il risultato potrebbe aiutare a determinare la probabilità di superare la prova con $n = 4$ ma i conti sono già assai voluminosi e per ora si tralasciano.

Per $r = 4$ è $x_4 \simeq 0.8246$. Il risultato potrebbe aiutare a determinare la probabilità di superare la prova con $n = 5$.

...

Per $r = 9$ è $x_9 \simeq 0.9160$. Il risultato potrebbe aiutare a determinare la probabilità di superare la prova con $n = 10$.

Valori approssimati di x_r per $r > 2$ si possono determinare **troncando la sommatoria a** 1 **o a** 2 **termini.**

Si avrebbe **nel primo caso**

$x^r \simeq r x^{r-1} \left(1-x\right)$ con l'approssimazione per difetto $x_r \simeq \dfrac{r}{r+1}$

(per inciso $\dfrac{r}{r+1}$ è il valore atteso del $\max\left(U_1, ..., U_r\right)$ con le U_h uniformi su $(0, 1)$ e indipendenti).

Si avrebbe **nel secondo caso**

$$x^r \simeq r x^{r-1} \left(1-x\right) + \frac{r\left(r-1\right)}{4} x^{r-2} \left(1-x\right)^2$$

con l'approssimazione ancora per difetto, ma nettamente migliore della precedente

$$x_r \simeq \frac{r^2 - 3r - \sqrt{4r\left(2r-1\right)}}{r^2 - 5r - 4}$$

Per $r = 3$ per esempio le due approssimazioni forniscono

$$\frac{r}{r+1} = 0.75$$

e

$$\frac{3^2 - 3 \cdot 3 - \sqrt{4 \cdot 3\left(2 \cdot 3 - 1\right)}}{3^2 - 5 \cdot 3 - 4} \simeq 0.7746$$

da confrontare con 0.7758.

Per determinare la probabilità di successo al variare di $n = 4, 5, ...$ **(fino a** 3 **lo si è già fatto) la situazione è intricata e occorre ideare appositi algoritmi.** Uno assai efficiente si basa sulla ricerca di un'opportuna soluzione per ognuna di n equazioni di grado via via crescente e su sommatorie di probabilità di n eventi a due a due incompatibili e relativi al superamento con successo della prova in corrispondenza della h-ma estrazione per $h = 1, 2, ..., n$.

In dettaglio occorre determinare subito i valori soglia prima definiti

$$x_0 = 0 < x_1 = 0.5 < x_2 \simeq 0.6899 < x_3 \simeq 0.7758 < x_4 < ... < x_{n-1} < x_n = 1$$

e calcolare poi (si tratta di eventi a due a due incompatibili)

$$Q_n = \sum_{h=1}^{n} P_h$$

avendo indicato con P_h **la probabilità di vincere con il tentativo fatto in occasione di un record alla h-ma estrazione. Non è un problema semplice il calcolo delle P_h per $h = 1, 2, ..., n$.**

Risulta intanto

$$P_1 = \frac{1 - (x_{n-1})^n}{n}$$

In quanto è stato estratto per primo un valore $t \geq x_{n-1}$: il pretendente si ferma subito al primo record confidando che i rimanenti siano tutti minori di t

$$P_1 = \int_{x_{n-1}}^{1} t^{n-1} dt = \frac{1 - (x_{n-1})^n}{n}$$

Per il calcolo della P_h con $h = 2, ..., n$ si consideri che essa si riferisce al verificarsi del seguente evento: si è arrivati all'estrazione h-ma con un estratto $t \geq x_{n-h}$ massimo tra tutti quelli prima estratti (l'h-ma estrazione deve essere un record...), ognuno dei precedenti $h-1$ estratti è minore del relativo valore soglia e di t e ognuno degli $n-h$ successivi valori da estrarre è minore di t. A questo punto occorre procedere mediante sommatoria tenuto conto dei diversi possibili intervalli di appartenenza di t, ovvero $t \in [x_{n-h}, x_{n-h+1})$, $t \in [x_{n-h+1}, x_{n-h+2})$, ..., $t \in [x_{n-1}, 1]$.

$$P_h = \int_{t \in [x_{n-h}, x_{n-h+1})} t^{n-1} dt + \int_{t \in [x_{n-h+1}, x_{n-h+2})} x_{n-h+1} t^{n-2} dt +$$

$$+ \int_{t \in [x_{n-h+2}, x_{n-h+3})} x_{n-h+1} \cdot x_{n-h+2} t^{n-3} dt + ... +$$

$$+ \int_{t \in [x_{n-1}, 1]} x_{n-h+1} \cdot x_{n-h+2} \cdot ... \cdot x_{n-1} t^{n-h} dt =$$

$$= \frac{(x_{n-h+1})^n - (x_{n-h})^n}{n} + x_{n-h+1} \frac{(x_{n-h+2})^{n-1} - (x_{n-h+1})^{n-1}}{n-1} +$$

$$+ x_{n-h+1} \cdot x_{n-h+2} \frac{(x_{n-h+3})^{n-2} - (x_{n-h+2})^{n-2}}{n-2} + ... +$$

$$+ x_{n-h+1} \cdot x_{n-h+2} \cdot ... \cdot x_{n-1} \frac{1 - (x_{n-1})^{n-h+1}}{n-h+1} =$$

omissis i passaggi

$$= \frac{\sum_{j=1}^{h-1} \left(\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1} - \frac{x_{n-j}^{n}}{n} \right)}{n-h+1} - \frac{x_{n-h}^{n}}{n}$$

Come accade spesso nel valutare le probabilità in contesti combinatorici c'è la possibilità di evitare voluminosi conti algebrico-analitici e di affidarsi a sottili ragionamenti. Vediamo come si può per questa seconda via giustificare il risultato indicato.

$$\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1}$$

è la probabilità che dei primi $h-1$ estratti il massimo di essi sia nella posizione j, sia minore del corrispondente valore soglia e non si sia fatto pertanto alcun tentativo di scelta per i primi $h-1$ estratti;

$$\frac{x_{n-j}^{n}}{n}$$

è la probabilità che il massimo di tutti gli n numeri sia nella posizione j e non si faccia pertanto alcun tentativo di scelta nelle n estrazioni;

$$\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1} - \frac{x_{n-j}^{n}}{n}$$

è la probabilità che dei primi $h-1$ estratti il massimo di essi sia nella posizione j, sia minore del corrispondente valore soglia, non si sia fatto alcun tentativo fino a $h-1$ (ma lo si possa fare successivamente) poiché il massimo tra gli n numeri estratti è dopo la posizione $h-1$, ovvero in una delle $n-h+1$ successive posizioni;

$$\sum_{j=1}^{h-1}\left(\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1} - \frac{x_{n-j}^{n}}{n}\right)$$

è la probabilità che non si sia fatto alcun tentativo fino a $h-1$ e il massimo tra gli n numeri estratti sia dopo la posizione $h-1$, ovvero in una delle $n-h+1$ successive posizioni;

$$\frac{\sum_{j=1}^{h-1}\left(\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1} - \frac{x_{n-j}^{n}}{n}\right)}{n-h+1}$$

è la probabilità che non si sia fatto alcun tentativo fino a $h-1$ e il massimo tra gli n numeri estratti sia nella posizione h. Per la probabilità P_h , con $h = 2, ..., n$, si ha pertanto

$$P_h = \frac{\sum_{j=1}^{h-1}\left(\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1} - \frac{x_{n-j}^{n}}{n}\right)}{n-h+1} - \frac{x_{n-h}^{n}}{n}$$

Infine per $n > 1$, sommando tali probabilità di vincere per $h = 1, 2, ..., n$, si ha

$$Q_n = \frac{1-(x_{n-1})^n}{n} + \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{h-1}\left(\frac{x_{n-j}^{h-1}}{h-1} - \frac{x_{n-j}^{n}}{n}\right)}{n-h+1} - \frac{x_{n-h}^{n}}{n}\right)$$

I conti fino a $n = 30$, e per questi basta conoscere fino a x_{29}, danno questa evidenza

n	x_n	Q_n
1	0.50000	1.00000
2	0.68988	0.75000
3	0.77584	0.68429
4	0.82459	0.65540
5	0.85595	0.63919
6	0.87781	0.62878
7	0.89391	0.62151
8	0.90626	0.61613
9	0.91604	0.61199
10	0.92398	0.60870
11	0.93054	0.60603
12	0.93606	0.60381
13	0.94077	0.60195
14	0.94483	0.60036
15	0.94837	0.59898
16	0.95148	0.59778
17	0.95424	0.59672
18	0.95671	0.59579
19	0.95892	0.59495
20	0.96091	0.59420
21	0.96272	0.59352
22	0.96437	0.59291
23	0.96589	0.59234
24	0.96727	0.59183
25	0.96855	0.59136
26	0.96974	0.59092
27	0.97083	0.59052
28	0.97185	0.59014
29	0.97281	0.58980
30	0.97369	0.58947

6 Una soluzione sub-ottima

Non è da poco il vantaggio che questa maggior informazione fornisce al pretendente rispetto alla versione classica del problema. A contrappeso la **regola di decisione ottima in questa versione del problema è assai complicata**. Il pretendente potrebbe chiedere, accontentandosi di una **soluzione subottima**, che, noto n, gli sia dato un unico valore soglia, in modo che si faccia l'unico tentativo appena quel valore soglia è uguagliato o maggiorato in una delle estrazioni. Ciò corrisponde per $n > 1$ a considerare il caso

$0 = x_0 < x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = k$

con k massimizzante (si noti che la formula trovata per Q_n vale anche per $0 = x_0 < x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = k$) la funzione

$$\varphi_n(k) = \frac{1-k^n}{n} + \sum_{h=2}^{n-1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{h-1}\left(\frac{k^{h-1}}{h-1}-\frac{k^n}{n}\right)}{n-h+1} - \frac{k^n}{n}\right) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{k^{n-1}}{n-1}-\frac{k^n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1-(n-1)k^n}{n} + \sum_{h=2}^{n}\frac{(h-1)\left(\frac{k^{h-1}}{h-1}-\frac{k^n}{n}\right)}{n-h+1}$$

Il valore di k massimizzante $\varphi_n(k)$, k_n, si determina come soluzione dell'equazione in $(0,1)$

$$-(n-1)k^{n-1} + \sum_{h=2}^{n}\frac{(h-1)\left(k^{h-2}-k^{n-1}\right)}{n-h+1} = 0$$

Per $n = 2$ si ha l'equazione

$$-k + \frac{(2-1)\left(k^{2-2}-k^{2-1}\right)}{2-2+1} = 0$$

con $k_2 = \frac{1}{2}$ e $\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Per $n = 3$ si ha

$$-2k^2 + \sum_{h=2}^{3}\frac{(h-1)\left(k^{h-2}-k^{3-1}\right)}{3-h+1} = 0$$

con $k_3 = \frac{2+\sqrt{13}}{9} \simeq 0.62284$ e $\varphi_3\left(\frac{2+\sqrt{11}}{7}\right) \simeq 0.67026$

I conti per $n \leq 30$ danno questa evidenza

n	k_n	$\varphi_n(k_n)$
1	0.50000	1.00000
2	0.50000	0.75000
3	0.62284	0.67026
4	0.69784	0.63116
5	0.74814	0.60797
6	0.78415	0.59263
7	0.81118	0.58172
8	0.83221	0.57358
9	0.84903	0.56726
10	0.86279	0.56222
11	0.87426	0.55810
12	0.88396	0.55468
13	0.89227	0.55178
14	0.89947	0.54931
15	0.90577	0.54716

16	0.91132	0.54529
17	0.91626	0.54363
18	0.92068	0.54217
19	0.92466	0.54085
20	0.92825	0.53967
21	0.93152	0.53860
22	0.93450	0.53763
23	0.93724	0.53675
24	0.93975	0.53594
25	0.94207	0.53519
26	0.94422	0.53450
27	0.94622	0.53386
28	0.94808	0.53327
29	0.94981	0.53272
30	0.95143	0.53221

Da notare il consistente vantaggio che il pretendente acquisisce rispetto alla versione classica del problema anche con questa regola di subottimalità, che comporta di memorizzare un unico valore soglia k_n, dato n, con cui confrontare i valori della dote via via estratti.

7 La terza versione del problema della dote

Una seconda variante conduce alla terza versione del problema che ha una semplice ed estetica soluzione. **Il sultano vuole ora comunque accasare ad ogni prova una delle sue n figlie e al pretendente di turno spetta la figlia e la dote associata all'estrazione di arresto delle estrazioni e, se al termine delle estrazioni il pretendente non ha fatto tentativi, egli dovrà comunque accettare la figlia e la dote relative all'ultimo biglietto estratto. Questa versione prevede che le doti siano ancora determinate con un campionamento bernoulliano in $(0, 1)$ (e questo lo sa anche il pretendente), ma il pretendente torna a essere informato, come nella versione classica, solo dei record che via via si presentano e non del valore record stampigliato sul biglietto estratto.**

La funzione obiettivo del pretendente è ora quella di massimizzare il valore atteso della dote selezionata, tenuto conto che se non ferma le estrazioni prima della n-ma dovrà comunque accettare la figlia e la dote relative all'ultimo biglietto, sia o no record.

Come aiutare il pretendente di turno? Per farla breve si dovrà ancora fissare un **indice soglia** $m \in \{0, 1, ..., n-1\}$ e arrestare le estrazioni sul record annunciato successivamente. Casi estremi: se $m = 0$ ci si ferma alla prima estrazione e se $m = n-1$ il pretendente avrà la figlia e la dote associate all'ultima estrazione. Per la determinazione della funzione obiettivo si deve considerare che **se un record è annunciato alla estrazione h-ma, per $h = 1, 2, ..., n$,**

allora il valore atteso della dote relativa al record annunciato è (il risultato è un classico e facilmente giustificabile)

$$E\left[X_h \mid \text{record alla } h\text{-ma estrazione}\right] = E\left[\max\left(X_1, .., X_h\right)\right] = \frac{h}{h+1}$$

avendo indicato con X_i, per $i = 1, 2, ..., h$, le variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$ selezionate fino alla h-ma estrazione.

Dati n e m il valore della funzione obiettivo è (con piccola discrepanza con la nota, che ha introdotto questa versione del problema, di J.N. Bearden, *A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs*, *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 50, pp. 58-59, 2006)

$$f_n\left(m\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{h=m+1}^{n} \frac{1}{h} \cdot \frac{m}{h-1} \cdot \frac{h}{h+1}$$

L'espressione di $f_n\left(m\right)$ si giustifica nel modo seguente.

- Il valore massimo di dote è uscito in una delle prime m estrazioni con probabilità $\frac{m}{n}$: allora non sono annunciati altri record nelle estrazioni successive alla m-ma e il pretendente deve accontentarsi di ciò che è rimasto nell'urna come ultima figlia e dote, con valore atteso $\frac{1}{2}$.

- Con probabilità $\frac{1}{h} \cdot \frac{m}{h-1}$ è annunciato un record in h, per $h = m+1, ..., n$ e il pretendente si ferma sulla relativa estrazione con valore atteso della dote $\frac{h}{h+1}$.

  Si noti che (successione e serie di Mengoli) $\frac{m}{n} + \sum\limits_{h=m+1}^{n} \frac{1}{h} \cdot \frac{m}{h-1} = 1$.

Un po di conti consentono di scrivere

$$f_n\left(m\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \sum_{h=m+1}^{n} \left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h+1}\right) =$$
$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{m\left(n-m\right)}{2\left(m+1\right)\left(n+1\right)}$$

L'analisi della differenza

$$f_n\left(m\right) - f_n\left(m-1\right) = \tfrac{1}{2} + \frac{m\left(n-m\right)}{2\left(m+1\right)\left(n+1\right)} - \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\left(m-1\right)\left(n-m+1\right)}{2m\left(n+1\right)}\right) =$$
$$= \frac{n+1-m^2-m}{2m\left(m+1\right)\left(n+1\right)}$$

evidenzia che m va determinato come quel massimo intero tale che

$$n+1-m^2-m \geq 0$$

con l'ovvia distinzione che esistono due soglie equivalenti se la disuguaglianza è soddisfatta con il segno di uguaglianza e ciò accade ovviamente infinite volte...

Si riportano fino a $n = 30$ i valori soglia ottimali, m_*, e il valore atteso massimo $f_n(m_*)$

n	m_*	$f_n(m_*)$
1	0	0.50000
2	1	0.58333
3	1	0.62500
4	1	0.65000
5	2 o 1	0.66667
6	2	0.69048
7	2	0.70833
8	2	0.72222
9	2	0.73333
10	2	0.74242
11	3 o 2	0.75000
12	3	0.75962
13	3	0.76786
14	3	0.77500
15	3	0.78125
16	3	0.78676
17	3	0.79167
18	3	0.79605
19	4 o 3	0.80000
20	4	0.80476
21	4	0.80909
22	4	0.81304
23	4	0.81667
24	4	0.82000
25	4	0.82308
26	4	0.82593
27	4	0.82857
28	4	0.83103
29	5 o 4	0.83333
30	5	0.83602

Si può notare come il valore della soglia ottimale cresca seguendo $\sqrt{n}$ e quindi meno rapidamente che nella più classica versione in cui cresce linearmente con n, ovvero seguendo $\frac{n}{e}$: **al crescere di n converrà arrestarsi molto prima in questa versione del problema!**

Il valore massimo della funzione obiettivo cresce con n, al contrario di quanto accadeva nelle altre versioni del problema fin qui esaminate, e addirittura

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(m_*) = 1$$

8 Una versione competitiva

A partire dagli anni '80 si sono considerate anche **versioni competitive del problema**. Con una di queste (M. Fushimi, *The secretary problem in a competitive situation*, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 24, pp. 350-359, 1981), legata alla versione classica del problema, concludo la trattazione.

Si assume che siano **due (ma si potrebbe pensare a più di due) i giovani pretendenti, Andrea e Bruno, che giocano in contemporanea** nella versione classica del problema (senza vedere il valore della dote, ma solo con l'annuncio dei record) con l'intento ognuno di ottenere in moglie la più bella figlia del sultano e con la massima dote. In questa versione i record, quando si presentano, sono annunciati per entrambi e le alternative per lo svolgimento del gioco sono

- uno dei due pretendenti, per primo, chiede di fermarsi sul record annunciato e l'altro fa invece proseguire le estrazioni, sperando in ulteriori annunci di record, che annullerebbero la speranza di vincere di chi ha scelto di fermarsi per primo
- i due pretendenti si fermano sullo stesso record annunciato e a quel punto, se il biglietto è quello "vincente", il vincitore è individuato con un lancio finale di regolare moneta (testa croce con probabilità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)
- nessuno dei due si è fermato sui record annunciati

In questa versione competitiva del problema, se le estrazioni non sono state fermate in corrispondenza del biglietto "vincente" la prova non è superata, le poste di partecipazione pagate incrementano le ricchezze del sultano e... si passa a una successiva coppia di pretendenti.

Se indichiamo con r e s le soglie strategiche (corrispondenti alla soglia del singolo pretendente della prima e della terza versione decisionale del problema, ora definite strategiche in quanto determinano la strategia usata dai due contendenti) fissate rispettivamente da Aldo e Bruno e con $A(r,s)$ la probabilità di vincere di Aldo quando Aldo usa la soglia r e Bruno la s, allora vale per $r = 1, 2, ..., n-1$ e per $s = 1, 2, ..., n-1$

$$A(r,s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=r+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r-s}{h-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=r+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{s}{h-1} & \text{se } 1 \leq s \leq r < n \\ \displaystyle\sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{h-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{h-1} & \text{se } 1 \leq r < s < n \end{cases}$$

Si tenga conto che

$\displaystyle\sum_{h=r+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r-s}{h-1}$ con $r \geq s$ è la probabilità somma delle probabilità che il biglietto vincente sia in una delle posizioni $h = r+1, ..., n$ e che il record precedente sia stato annunciato in una delle estrazioni di indice $s+1,...,r$, complessivamente $r-s$.

$\frac{1}{2}\sum_{h=r+1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{s}{h-1}$ con $r\geq s$ è la probabilità somma delle probabilità che il biglietto vincente sia in una delle posizioni $h=r+1,...,n$ e che il record precedente sia stato annunciato in una delle estrazioni di indice $1,...,s$, complessivamente s.

$\sum_{h=r+1}^{s}\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{h-1}$ con $r<s$ è la probabilità somma delle probabilità che il biglietto vincente sia in una delle posizioni $h=r+1,...,s$ e che il record precedente sia stato annunciato in una delle estrazioni di indice $1,...,r$, complessivamente r.

$\frac{1}{2}\sum_{h=s+1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{h-1}$ con $r<s$ è la probabilità somma delle probabilità che il biglietto vincente sia in una delle posizioni $h=s+1,...,n$ e che il record precedente sia stato annunciato in una delle estrazioni di indice $1,...,r$, complessivamente r.

Per $r=s=0$ è $A(0,0)=B(0,0)=\frac{1}{2n}$. Inoltre $A(0,s)=\frac{1}{n}$ per $s=1,2,...,n-1$ e $A(r,0)=\sum_{h=r+1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{h-1}$ per $r=1,2,...,n-1$.

Se poi si indica con $B(r,s)$ la probabilità di vincere di Bruno quando Aldo usa la soglia r e Bruno la s, allora vale, stante **la condizione di parità strategica dei due pretendenti,** $B(r,s)=A(s,r)$**.**

Se il **gioco è non cooperativo si punta a individuarne i punti (o gli eqilibri) di Nash**, ovvero le coppia di strategie (r_*,s_*) tali che

$A(r,s_*)\leq A(r_*,s_*)$ per ogni $r=0,1,...,n-1$

$B(r_*,s)\leq B(r_*,s_*)$ per ogni $s=0,1,...,n-1$

Se il **gioco è cooperativo una negoziazione potrebbe avvenire ricercando la coppia di strategie** (r_*,s_*) **tali da massimizzare**

$A(r,s)+B(r,s)$ o $A(r,s)\cdot B(r,s)$

Per illustrare le questioni poste vediamo cosa accade per $n = 7$. La tabella dei valori di $A(r, s)$ è

r \ s	0	1	2	3	4	5	6
0	0.07143	0.14286	0.14286	0.14286	0.14286	0.14286	0.14286
1	0.35000	0.17500	0.24643	**0.28214**	0.30595	0.32381	0.33810
2	**0.41429**	0.31071	0.20714	0.27857	**0.32619**	**0.36190**	**0.39048**
3	0.40714	**0.33929**	**0.27143**	0.20357	0.27500	0.32857	0.37143
4	0.35238	0.30833	0.26429	0.22024	0.17619	0.24762	0.30476
5	0.26190	0.23571	0.20952	0.18333	0.15714	0.13095	0.20238
6	0.14286	0.13095	0.11905	0.10714	0.09524	0.08333	0.07143

Le migliori strategie di risposta sono (vedi i valori in grassetto)

s	$r(s)$	$A(r(s), s)$
0	2	0.41429
1	3	0.33929
2	3	0.27143
3	1	0.28214
4	2	0.32619
5	2	0.36190
6	2	0.39048

Dalle migliori strategie di risposta si vede se esistono equilibri di Nash per il gioco, che si hanno in corrispondenza delle **strategie di Bruno (o simmetricamente di Aldo) che sono la migliore risposta alla migliore risposta di Aldo a quelle strategie**

s	$r(s)$	$s(r(s))$	
0	2	3	
1	3	1	con $(3, 1)$ punto di Nash
2	3	1	
3	1	3	con $(1, 3)$ punto di Nash
4	2	3	
5	2	3	
6	2	3	

Le probabilità di vincita corrispondenti ai due punti di Nash sono

$A(3, 1) = 0.33929, \qquad B(1, 3) = 0.28214$

$A(1, 3) = 0.28214, \qquad B(1, 3) = 0.33929$

Per il gioco cooperativo nel cercare il $\max A(r, s) + B(r, s)$ si ricade nella soluzione di Nash

$A(3, 1) + B(3, 1) = 0.33929 + 0.28214 = A(1, 3) + B(1, 3) =$

$= 0.28214 + 0.33929 = 0.62143$

Quello che si è visto per $n = 7$ esteso ai casi $n = 2, 3, ..., 30$ dà le seguenti risultanze (si evita, stante la situazione perfettamente simmetrica sul piano strategico, di indicare i "doppioni" ottenibili scambiando le strategie impiegate dai giocatori)

n	strategie, $A(r,s)$, $B(r,s)$ per punti di Nash		strategie, $A(r,s)$, $B(r,s)$ tali da $\max A(r,s) + B(r,s)$	
2	0 1	0.50000 0.50000	0 1	$0.50000 + 0.50000 = 1.00000$
3	0 1	0.33333 0.50000	0 1	$0.33333 + 0.50000 = 0.83333$
4	1 2	0.35417 0.31250	0 1	$0.25000 + 0.45833 = 0.70833$
5	1 2	0.30833 0.32500	1 3	$0.35833 + 0.29167 = 0.65000$
6	1 3	0.31528 0.32639	1 3	$0.31528 + 0.32639 = 0.64167$
7	1 3	0.28214 0.33929	1 3	$0.28214 + 0.33929 = 0.62143$
8	2 4	0.30327 0.28482	1 4	$0.27664 + 0.33229 = 0.60893$
9	2 4	0.28347 0.29484	1 4	$0.25284 + 0.34398 = 0.59682$
10	2 4	0.26623 0.29869	2 5	$0.29123 + 0.29825 = 0.58948$
11	3 5	0.27440 0.26907	2 6	$0.29203 + 0.29347 = 0.58550$
12	3 6	0.28790 0.27620	2 6	$0.27527 + 0.30689 = 0.58216$
13	3 6	0.27537 0.28380	2 6	$0.26050 + 0.31534 = 0.57584$
14	3 6	0.26394 0.28826	2 7	$0.25930 + 0.31291 = 0.57221$
15	4 7	0.27132 0.26719	3 8	$0.28444 + 0.28544 = 0.56988$
16	4 8	0.28055 0.27201	3 8	$0.27291 + 0.29468 = 0.56759$
17	4 8	0.27140 0.27807	3 9	$0.27340 + 0.29244 = 0.56584$
18	4 8	0.26286 0.28223	3 9	$0.26312 + 0.30071 = 0.56383$
19	5 9	0.26925 0.26590	3 9	$0.25366 + 0.30681 = 0.56047$
20	5 9	0.26237 0.26971	4 11	$0.28100 + 0.27845 = 0.55945$
21	5 10	0.26905 0.27456	4 11	$0.27238 + 0.28662 = 0.55900$
22	5 10	0.26223 0.27831		
	6 11	0.27377 0.26051	4 11	$0.26433 + 0.29307 = 0.55740$
23	6 11	0.26780 0.26499	4 12	$0.26470 + 0.29171 = 0.55641$
24	6 11	0.26207 0.26844	4 12	$0.25729 + 0.29767 = 0.55496$
25	6 12	0.26750 0.27219	5 13	$0.27125 + 0.28255 = 0.55380$
26	6 12	0.26183 0.27557		
	7 13	0.27181 0.26043	5 14	$0.27206 + 0.28123 = 0.55329$
27	7 13	0.26673 0.26431	5 14	$0.26555 + 0.28720 = 0.55275$
28	7 13	0.26183 0.26744	5 14	$0.25937 + 0.29215 = 0.55152$
29	7 14	0.26640 0.27048	5 15	$0.25966 + 0.29121 = 0.55087$
30	7 14	0.26154 0.27353	6 16	$0.27132 + 0.27882 = 0.55014$

Da notare che in tutti i casi si hanno almeno due equilibri di Nash e in alcuni casi quattro

È di un qualche interesse osservare **quando il massimo di** $A(r,s) \cdot B(r,s)$ **impone di considerare coppie di strategie diverse da quelle che massimizzano** $A(r,s) + B(r,s)$. Ciò accade nei seguenti casi quando $n \leq 30$

n	strategie, $A(r,s)$, $B(r,s)$ tali da $\max A(r,s)\cdot B(r,s)$	
9	2 5	0.31124 0.28201
13	2 7	0.27332 0.30148
19	4 10	0.27973 0.28048
22	4 12	0.27260 0.28431
24	5 13	0.27821 0.27610
28	5 15	0.26575 0.28567
29	6 16	0.27711 0.27297

Si può procedere a qualche conto per ricercare gli equilibri di Nash. Limitandosi al caso in cui $r < s$ la miglior risposta data la strategia s di Bruno è per Aldo $r(s)$, ovvero quella (ottenuta analizzando il segno della differenza $A(r,s) - A(r-1,s)$ e approssimando con $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} \simeq \ln \frac{n-\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}}$) che verifica

$$r(s) \simeq \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{e}$$

Mentre, sempre per $r < s$, la miglior risposta data la strategia r di Aldo è per Bruno $s(r)$, ovvero quella (ottenuta analizzando il segno della differenza $B(r,s) - B(r,s-1)$ e approssimando con $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} \simeq \ln \frac{n-\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}}$) che verifica

$$\ln \frac{n-\frac{1}{2}}{s(r)-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}r}{s(r)-1} \simeq 1$$

Pertanto una buona stima del punto di Nash è data risolvendo numericamente l'equazione in s

$$\ln \frac{n-\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{e}\right)}{s-1} = 1$$

Preso il valore intero più vicino e per difetto alla soluzione trovata, sia s_*, si determina poi r_* come l'intero più vicino a

$$\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(s_*-\frac{1}{2}\right)}}{e}$$

Una banale elaborazione conduce, per $n = 3, 4, ..., 100$, alle seguenti terne in cui si indicano nell'ordine n, r_* e s_*

3 1 2, 4 1 2, 5 1 3, 6 1 3, 7 1 3, 8 2 4, 9 2 4, 10 2 5, 11 3 5, 12 3 6, 13 3 6, 14 3 7,15 4 7, 16 4 8, 17 4 8, 18 4 9, 19 5 9, 20 5 10, 21 5 10, 22 6 11, 23 6 11, 24 6 12, 25 6 12, 26 7 13, 27 7 13, 28 7 14, 29 7 14, 30 7 14, 31 8 15, 32 8 15, 33 8 16, 34 8 16, 35 9 17, 36 9 17, 37 9 18, 38 9 18, 39 10 19, 40 10 19, 41 10 20, 42 10 20, 43 11 21, 44 11 21, 45 11 22, 46 12 22, 47 12 23, 48 12 23, 49 12 24, 50

13 24, 51 13 25, 52 13 25, 53 13 26, 54 14 26, 55 14 27, 56 14 27, 57 15 28, 58 15 28, 59 15 29, 60 15 29, 61 16 30, 62 16 30, 63 16 30, 64 16 31, 65 16 31, 66 17 32, 67 17 32, 68 17 33, 69 17 33, 70 18 34, 71 18 34, 72 18 35, 73 18 35, 74 19 36, 75 19 36, 76 19 37, 77 19 37, 78 20 38, 79 20 38, 80 20 39, 81 20 39, 82 21 40, 83 21 40, 84 21 41, 85 22 41, 86 22 42, 87 22 42, 88 22 43, 89 23 43, 90 23 44, 91 23 44, 92 23 45, 93 24 45, 94 24 46, 95 24 46, 96 25 47, 97 25 47, 98 25 48, 99 25 48, 100 26 49.

Il confronto dei punti indicati con quelli effettivi prima calcolati per $n \leq 30$ rileva una non perfetta coincidenza, ma consente un efficace inseguimento dei "veri" punti di Nash.

Un'ultima osservazione può riguardare il caso cooperativo. Considerando il caso in cui Aldo e Bruno massimizzano $A(r,s) + B(r,s)$, se i due pretendenti decidono di cooperare **il modello torna a essere nella sostanza di tipo decisionale e non strategico**. La loro scelta è ora la coppia concordata di soglie (r,s) tali che

$$\max_{(r,s)} A(r,s) + B(r,s) := \varphi(r,s)$$

Il massimo della funzione

$$\varphi(r,s) = \sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{h-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{h-1} +$$

$$+ \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{s-r}{h-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{h-1} =$$

$$= \frac{r}{n} \sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{h-1} + \frac{s}{n} \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1}$$

lo si può individuare analizzando i segni delle differenze $\varphi(r,s) - \varphi(r-1,s)$ e $\varphi(r,s) - \varphi(r,s-1)$. Risulta

$$\varphi(r,s) - \varphi(r-1,s) = \frac{r}{n} \sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{h-1} - \frac{r-1}{n} \sum_{h=r}^{s} \frac{1}{h-1} =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{h-1} - 1 \right)$$

e

$$\varphi(r,s) - \varphi(r,s-1) = \frac{r}{n} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{n} \left(\sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} - 1 \right)$$

Informazioni utili sui punti di massimo si hanno pertanto risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{h-1} - 1 \geq 0 \\ \displaystyle\frac{r}{s-1} + \left(\sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} - 1 \right) \geq 0 \end{cases}$$

Utilizzando per semplicità le approssimazioni

$$\sum_{h=r+1}^{s} \frac{1}{h-1} \simeq \ln \frac{s-1}{r} \text{ e } \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} \simeq \ln \frac{n-\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}}$$

il sistema conduce a considerare

$$\begin{cases} \dfrac{s-1}{r} \simeq e \\ \dfrac{n-\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} \simeq \exp\left(1-\frac{1}{e}\right) \end{cases}$$

Da cui

$$s \simeq \left\lfloor \tfrac{1}{2} + \left(n-\tfrac{1}{2}\right)\exp\left(-\left(1-\tfrac{1}{e}\right)\right)\right\rfloor \text{ e } r \simeq \left\lfloor \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)-\frac{1}{2}}{e} \right\rfloor$$

La regola trovata insegue bene i valori ottimi di r e di s, discostandosi al più di -1 o di $+1$ da quelli ottimi per tutti i valori di $n \leq 100$ (controllati) e indica il comportamento asintotico di $r \simeq n\exp\left(-2+\frac{1}{e}\right)$ e di $s \simeq n\exp\left(-1+\frac{1}{e}\right)$. La probabilità di vincere, $\dfrac{r}{n}\displaystyle\sum_{h=r+1}^{s}\frac{1}{h-1} + \frac{s}{n}\sum_{h=s+1}^{n}\frac{1}{h-1}$, per n illimitato tende così a

$$\exp\left(-2+\tfrac{1}{e}\right)\cdot 1 + \exp\left(-1+\tfrac{1}{e}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{e}\right) \simeq 0.53146$$

Ma se i due decidono di cooperare "in senso più ampio" possono ottenere qualcosa di più ?! Direi di sì: nel modello di cooperazione appena considerato anche se $r < s$ c'è l'eventualità che facciano una scelta congiunta fermandosi entrambi sulla stessa estrazione, mentre conviene loro fare sempre scelte disgiunte nel fermare le estrazioni, magari concordando che la prima fermata la faccia uno dei due e che l'altro faccia la (eventuale) seconda fermata.

Il problema è ancora di tipo decisionale ed equivale a un unico pretendente che possa effettuare due scelte e che supera la prova se nelle, al più due, scelte fatte si "imbatte" nella figlia-dote di massimo valore.

Sia ancora descritta con coppie (r, s) con $r < s$ la politica di scelta adottata: il primo tentativo si fa sul record annunciato dopo la r-ma estrazione e il secondo tentativo si fa solo se si è fatto il primo tentativo e si è dopo l'estrazione s-ma.

Vanno distinti i seguenti tre eventi due a due incompatibili, ognuno dei quali comporta il successo nella prova che può indicarsi come evento V e quindi con $V = A + B + C$,

A vincita con il primo tentativo senza usare il secondo

B si è fatto un primo tentativo in $r+1$ o in $r+2$ o....o in s e la vincita avviene con il secondo

C vincita con tutti e due i tentativi fatti dopo la s-ma estrazione

Risulta per l'evento A

$$P(A) = \frac{r}{n}\left(\frac{1}{r} + ... + \frac{1}{n-1}\right) \text{ se } r \geq 1$$

e

$P(A) = \frac{1}{n}$ se $r = 0$

analogamente per l'evento B (il penultimo record ha $s - r$ posizioni possibili perchè si realizzi l'evento considerato)

$P(B) = \frac{s-r}{n}\left(\frac{1}{s} + ... + \frac{1}{n-1}\right)$ se $s > r \geq 0$

Più complicato è l'evento C e occore distinguere le estrazioni, $s+2$,...,n, in cui si vince al secondo tentativo: se h è la generica estrazione in cui è annuciato il record che consente di vincere, allora il penultimo record deve essere stato annunciato nella j-ma estrazione con $j = s+1, ..., h-1$ (eventi equiprobabili, due a due incompatibili e ognuno con probabilità $\frac{1}{h-1}$) e il record precedente a quello relativo alle $(j-1)$ precedenti estrazioni deve essere stato annuciato tra la 1-ma e la r-ma estrazione: la probabilità condizionata di questo evento è allora

$\sum_{j=s+1}^{h-1} \frac{1}{h-1} \cdot \frac{r}{j-1}$ per $h = s+2, ..., n$

e quindi

$P(C) = \sum_{h=s+2}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=s+1}^{h-1} \frac{1}{j-1} \cdot \frac{r}{h-1}$

La probabilità di vincere è pertanto

$P_{r,s,n} = P(V) = P(A) + P(B) + P(C)$

Se si indica con r_* e s_* il valori ottimi al variare di $n \leq 30$ si hanno le seguenti risultanze con i quattro dati in fila per ogni n che si riferiscono a $n, r_*, s_*, P_{r_* s_* n}$

$n, r_*, s_*, P_{r_*,s_*,n}$				$n, r_*, s_*, P_{r_*,s_*,n}$				$n, r_*, s_*, P_{r_*,s_*,n}$			
1	0	0	1.00000	2	0	1	1.00000	3	0	1	0.83333
4	1	2	0.70833	5	1	2	0.70833	6	1	2	0.69306
7	1	2	0.67222	8	1	3	0.65561	9	2	3	0.65104
10	2	3	0.64633	11	2	4	0.64191	12	2	4	0.63532
13	3	5	0.63058	14	3	5	0.62982	15	3	5	0.62731
16	3	6	0.62442	17	3	6	0.61782	18	4	6	0.62015
19	4	7	0.61936	20	4	7	0.61782	21	4	8	0.61562
22	5	8	0.61457	23	5	8	0.61406	24	5	9	0.61317
25	5	9	0.61211	26	5	9	0.61055	27	6	10	0.61040
28	6	10	0.60996	29	6	10	0.60909	30	6	11	0.60830

Anche in questo caso il massimo di $P(V) := \varphi(r,s)$ lo si può individuare analizzando i segni delle differenze $\varphi(r,s) - \varphi(r-1,s)$ e $\varphi(r,s) - \varphi(r,s-1)$ che in questo caso danno per $s > r \geq 2$

$\varphi(r,s) - \varphi(r-1,s) =$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{r} + ... + \frac{1}{n-1} - 1\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{s} + ... + \frac{1}{n-1}\right) +$$
$$+ \sum_{h=s+2}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=s+1}^{h-1} \frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{h-1}$$

$\varphi(r,s) - \varphi(r,s-1) =$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{s} + ... + \frac{1}{n-1} - \left(1 - \frac{r}{s-1}\right)\right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{s-1} \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} =$$
$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{r}{s-1}\right)\left(\sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} - 1\right)$$

Informazioni utili sui punti di massimo si hanno pertanto risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{h=r+1}^{n} \frac{1}{h-1} - 1 - \sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} + \sum_{h=s+2}^{n}\left(\sum_{j=s+1}^{h-1} \frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{h-1}\right) \geq 0 \\ \displaystyle\left(1 - \frac{r}{s-1}\right)\left(\sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} - 1\right) \geq 0 \end{cases}$$

Utilizzando le approssimazioni per m e n "grandi" $\displaystyle\sum_{h=m+1}^{n} \frac{1}{h-1} \simeq \ln \frac{n \pm a}{m \pm b}$ con $a, b = -1, 0, +1$ e l'approssimazione (facilmente giustificabile con opportuni integrali definiti)

$$\sum_{h=s+2}^{n}\left(\sum_{j=s+1}^{h-1} \frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{h-1}\right) \simeq \sum_{h=s+2}^{n}\left(\frac{1}{h-1} \ln \frac{h-1}{s}\right) \simeq \tfrac{1}{2}\left(\ln \frac{n}{s}\right)^2$$

il sistema porta a considerare le due possibilità, in relazione all'annullamento dei due fattori del prodotto relativo alla seconda disequazione del sistema.

La prima possibilità, associata a $\displaystyle\left(\sum_{h=s+1}^{n} \frac{1}{h-1} - 1\right) \simeq 0$, conduce a

$$\begin{cases} \ln \frac{n}{r} - \ln \frac{n}{s} + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{n}{s}\right)^2 \simeq 1 \\ \ln \frac{n}{s} \simeq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \ln \frac{n}{r} + \frac{1}{2} \simeq 0 \\ \ln \frac{n}{s} \simeq 1 \end{cases}$$

da cui l'approssimazione

$$s \simeq \frac{n}{e} \text{ e } r \simeq \frac{n}{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}$$

che fornisce la probabilità asintotica (e un'approssimazione per difetto per ogni valore di n)

$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + \left(e^{-1} - e^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}} = e^{-1} + e^{-\frac{3}{2}} \simeq 0.59101$

La seconda possibilità, associata a $\left(1 - \dfrac{r}{s-1}\right) \simeq 0$, conduce a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\ln \dfrac{n}{r}\right)^2 \simeq 1 \\ r \simeq s \end{cases}$$

da cui l'approssimazione

$$r \simeq s \simeq \frac{n}{\exp\left(\sqrt{2}\right)}$$

che fornisce la probabilità asintotica

$$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} + 0 + \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\right) e^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{2}\right) \simeq 0.58694$$

Si noti come questa probabilità associata alla seconda possibilità sia molto vicina a quella ottima associata alla prima possibilità e che le due regole **collassino nella stessa regola decisionale quando nella soluzione ottima è** $s = r + 1$: ciò si verifica per $n \leq 7$, per $n = 9$ e per $n = 10$.

È associabile a questa seconda soluzione di cooperazione una semplice ed efficace regola decisionale ancorché subottima:

Si calcoli il massimo valore di r per il quale
$\dfrac{1}{r} + ... + \dfrac{1}{n-1} > \sqrt{2}$

e si utilizzino i (primi due...) record annunciati successivamente alla r-ma estrazione.

L'impiego di questa regola produce i seguenti risultati, in cui si confrontano al variare di n la soluzione $r_{ott} = s_{ott}$ numericamente individuata e quella qui suggerita r_* con indicazione delle rispettive probabilità,

n	r_{ott}	*prob.*	r_*	*prob.*
1	0	1.00000	0	1.00000
2	0	1.00000	0	1.00000
3	0	0.83333	0	0.83333
4	1	0.70833	1	0.70833
5	1	0.70833	1	0.70833
6	1	0.69306	1	0.69306
7	1	0.67222	2	0.64444
8	2	0.65139	2	0.65139
9	2	0.65104	2	0.65104
10	2	0.64633	2	0.64633
11	2	0.63901	3	0.62729
12	3	0.63022	3	0.63022
13	3	0.63020	3	0.63020
14	3	0.62810	3	0.62810
15	3	0.62451	4	0.61773

16	3	0.61987	4	0.61942
17	4	0.61953	4	0.61953
18	4	0.61841	4	0.61841
19	4	0.61634	4	0.61634
20	4	0.61355	5	0.61291
21	5	0.61306	5	0.61306
22	5	0.61240	5	0.61240
23	5	0.61109	5	0.61109
24	5	0.60925	6	0.60855
25	6	0.60872	6	0.60872
26	6	0.60832	6	0.60832
27	6	0.60743	6	0.60743
28	6	0.60614	7	0.60544
29	7	0.60561	7	0.60561
30	7	0.60535	7	0.60535

Chiudo qui questa voluminosa trattazione del problema della scelta... dell'altra metà, sperando di aver dato un'idea non troppo sommaria di come lavorano i matematici contaminati dalle applicazioni e, nello specifico, di cosa significhi impiegare la matematica nei problemi di scelta. **Un'ultima provocazione con un quesito**: "Si potrebbe immaginare un gioco tra il sultano che trucca l'ordine di estrazione e il/i pretendente/i?" Senz'altro... e approfitto di questa occasione per segnalare che un problema analogo a quello che si potrebbe così configurare l'ho trattato in due note pubblicate sul Periodico di Matematiche del 1996 della Mathesis.

Riporto di seguito i pochi lavori già citati e di cui mi sono avvalso per la redazione del testo di questa conferenza.

L. Moser, On a problem of Cayley, *Scripta Math.*, vol.22, pp 289-292, 1956.

T.S. Ferguson, Who solved the secretary problem?, *Statistical Science*, vol.4, pp. 282-296, 1989.

J.P. Gilbert e F. Mosteller, Recognizing the maximum of a sequence, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 61, pp. 35-73, 1966.

M. Fushimi, The secretary problem in a competitive situation, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 24, pp. 350-359, 1981.

J.N. Bearden, A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs, *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 50, pp. 58-59, 2006.

Numerose (diverse decine) ulteriori indicazioni bibliografiche si possono trovare in Internet entrando con parole chiave come Secretary problem, Competitive secretary problem...

Indice